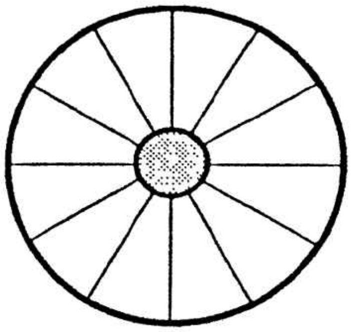
6.2. *Una ruota è costituita da un anello di massa $m_1 = 50$kg e raggio $r_1 = 50$cm, da un disco di massa $m_2 = 10$kg e raggio $r_2 = 10$cm, coassiale all'anello, e da dodici raggi, ciascuno di massa $m_3 = 1$kg e lunghezza $d = 40$cm, disposti come in figura. Calcolare il momento d'inerzia rispetto ad un asse ortogonale alla ruota e passante per il centro e rispetto ad un asse a questo parallelo e passante per un punto del bordo.*



Il momento d'inerzia rispetto all'asse passante per il centro è, per l'anello,

$$I_1 = m_1 r_1^2 = 12.5\text{kgm}^2 \;;$$

per il disco si ha

$$I_2 = \frac{1}{2} m_2 r_2^2 = 0.05\text{kgm}^2 \;.$$

Ai raggi si applica il teorema di H.-S.:

$$I_3 = 12\left[\frac{1}{12} m_3 d^2 + m_3\left(\frac{d}{2} + r\right)^2\right] = 1.24\text{kgm}^2 \;.$$

In totale

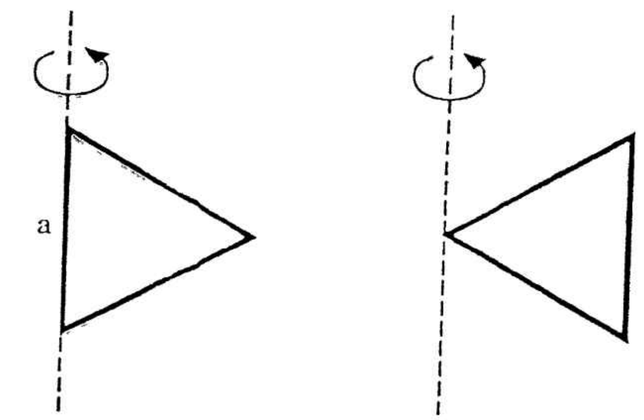
$$I = I_1 + I_2 + I_3 = 13.79\text{kgm}^2 \;.$$

Il centro della ruota è il centro di massa; la massa totale è $m = 72$kg e applicando il teorema di H.-S. all'intera ruota

$$I' = I + m r_1^2 = 13.79 + 18.00 = 31.79\text{kgm}^2 \;.$$

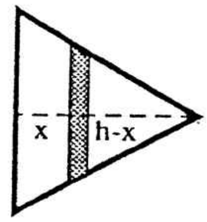
Si vede che il cambiamento di asse ha un effetto notevole.

6.3. *Una massa m è distribuita uniformemente sulla superficie di un triangolo equilatero di lato a. Si considerino i due assi di rotazione indicati in figura e si calcolino i relativi momenti d'inerzia.*



Dividiamo il triangolo in strisce infinitesime parallele all'asse di rotazione, larghe dx e distanti x dall'asse. Nel caso a sinistra l'altezza di una striscia è $2(h-x)\mathrm{tg}30° = 2(h-x)/\sqrt{3}$ se h è l'altezza del triangolo: $h = \sqrt{3}a/2$. La massa di una striscia è

$$dm = \frac{2(h-x)}{\sqrt{3}}\rho_s dx$$



e il momento d'inerzia è

$$dI = dmx^2 = \frac{2\rho_s}{\sqrt{3}}(h-x)x^2 dx \ .$$

Integriamo per x che varia da 0 a h:

$$I = \frac{2\rho_s}{\sqrt{3}}\int_0^h (h-x)x^2 dx = \frac{\rho_s h^4}{6\sqrt{3}} = \frac{1}{8}ma^2 = \frac{1}{6}mh^2 \ .$$

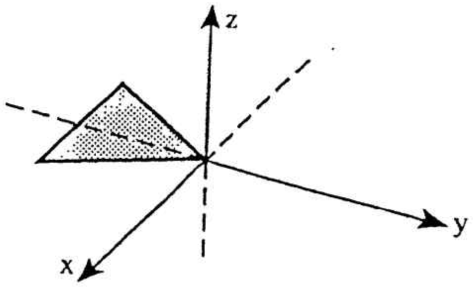
essendo $m = \rho_s \frac{1}{2}ah = \rho_s \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$.

Procedendo alla stessa maniera nel caso a destra si trova

$$I = \frac{\rho_s h^4}{2\sqrt{3}} = \frac{3}{8}ma^2 = \frac{1}{2}mh^2 \ ,$$

giustamente maggiore in quanto la distribuzione di massa è mediamente più lontana dall'asse di rotazione.

6.4. *Si riconsideri il triangolo equilatero del problema 6.3 e si ricalcolino i momenti d'inerzia rispetto ai tre assi indicati in figura.*

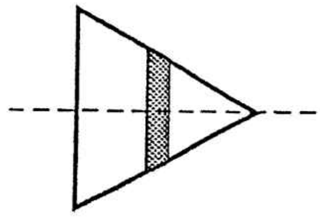


Il momento d'inerzia I_x è già stato calcolato nel problema 6.3 e vale

$$I_x = \frac{3}{8}ma^2 \ .$$

Il momento d'inerzia rispetto all'asse y si calcola in modo analogo: si divide il triangolo in strisce, equiparabili ad aste, ciascuna lunga x e di momento d'inerzia

$$dI_y = \frac{1}{12}dmx^2$$



con $dm = \rho_s x dy$, $x = 2y\mathrm{tg}30° = 2y/\sqrt{3}$,

$$\Rightarrow dI_y = \frac{2}{9\sqrt{3}}\rho_s y^3 dy \ , \ I_y = \frac{2}{9\sqrt{3}}\rho_s \int_0^h y^3 dy = \frac{1}{18\sqrt{3}}\rho_s h^4$$

dove $h = \sqrt{3}a/2$ e $\rho_s = m/\frac{1}{2}ah$. Pertanto

$$I_y = \frac{1}{24}ma^2 \ .$$

Infine, per il calcolo di I_z è ancora valida la suddivisione del triangolo in aste, ciascuna delle quali però non ruota rispetto al proprio centro, ma rispetto ad un asse distante y dal centro, per cui si deve applicare il teorema di H.-S.:

$$dI_z = \frac{1}{12}dmx^2 + dmy^2 = \frac{2}{9\sqrt{3}}\rho_s y^3 dy + \frac{2}{\sqrt{3}}\rho_s y^3 dy = \frac{20}{9\sqrt{3}}\rho_s y^3 dy$$

e si vede che $dI_z = 10 dI_y$; segue allora

$$I_z = \frac{5}{12}ma^2 \ .$$

Si osservi che vale la relazione $I_z = I_x + I_y$. Abbiamo in effetti verificato per un caso particolare il seguente risultato generale: dato un corpo sottile posto nel piano x, y i suoi momenti d'inerzia I_x e I_y si scrivono

$$I_x = \int dm(y^2+z^2) \approx \int dmy^2 \quad , \quad I_y = \int dm(x^2+z^2) \approx \int dmx^2$$

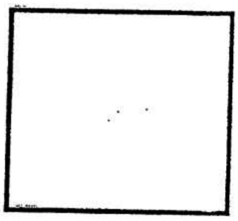
in quanto la coordinata z è praticamente trascurabile (spessore $\Delta z \simeq 0$). Poiché d'altra parte

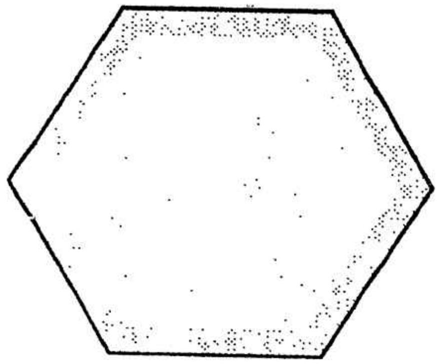
$$I_z = \int dm(x^2+y^2)$$

si trova appunto che $I_z = I_x + I_y$.

Si dimostra così per esempio che il momento d'inerzia di un disco rispetto a un diametro è $I = \frac{1}{4}mr^2$: $I = I_x = I_y$, $I_z = I_x + I_y = 2I$, $I = I_z/2$.

6.5. ***Calcolare il momento d'inerzia di una lastra quadrata e di una lastra a forma di esagono regolare rispetto ad un asse passante per il centro e ortogonale alla lastra; il lato è a e la massa m.***





Detto z l'asse di rotazione, per il quadrato utilizziamo il fatto che il momento d'inerzia rispetto all'asse x o y è $ma^2/12$ per cui

$$I_z = I_x + I_y = \frac{1}{6}ma^2 \quad .$$

Per l'esagono osserviamo che esso è formato da 6 triangoli equilateri e pertanto

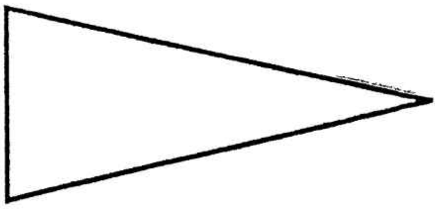
$$I_z = 6\ \frac{5}{12}\ \frac{ma^2}{6} = \frac{5}{12}ma^2 \quad ,$$

avendo sfruttato il risultato del problema 6.4.

Si dimostri che se la stessa massa fosse uniformemente concentrata sul perimetro i momenti d'inerzia sarebbero due volte maggiori, cioè rispettivamente pari a $\frac{1}{3}ma^2$ e $\frac{5}{6}ma^2$.

6.6. ***Calcolare il momento d'inerzia di una lastra a forma di triangolo isoscele ri-***

spetto ad un asse ortogonale alla lastra e passante per il vertice O indicato in figura; estendere il risultato a un poligono regolare e a un disco.



Seguiamo lo stesso metodo dei problemi precedenti; diciamo $x = 2y\mathrm{tg}\theta$ la lunghezza dell'asta di massa $dm = \rho_s x dy$ distante y dall'asse di rotazione e applichiamo il teorema di H.-S.:

$$dI = \frac{1}{12}(\rho_s x dy)x^2 + (\rho_s x dy)y^2 = 2\rho_s \mathrm{tg}\theta\left(1 + \frac{1}{3}\mathrm{tg}^2\theta\right)y^3 dy.$$

Integriamo da zero a h, altezza del triangolo relativa alla base $a = 2h\mathrm{tg}\theta$:

$$I = \frac{1}{8}ma^2\frac{3 + \mathrm{tg}^2\theta}{3\mathrm{tg}^2\theta} = \frac{1}{6}mh^2(3 + \mathrm{tg}^2\theta) ,$$

avendo sostituito a ρ_s $m/\frac{1}{2}ah$.

Un poligono formato da n triangoli isosceli ha momento d'inerzia eguale a I rispetto all'asse passante per il centro e ortogonale al piano del poligono. L'angolo θ è pari a $\phi/2$ e $\phi = 360°/n$; h è l'apotema, m è la massa totale.

Quando n è molto grande θ è molto piccolo, $\mathrm{tg}\theta \simeq \theta \ll 3$ e il momento d'inerzia tende al valore

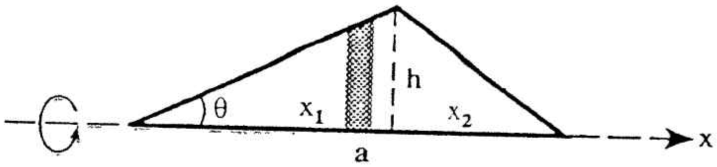
$$I = \int \frac{1}{2}h^2 dm = \frac{1}{2}mh^2 .$$

Per n tendente all'infinito il poligono tende a un disco, h tende a r e il momento d'inerzia è $\frac{1}{2}mr^2$.

Si verifica facilmente che la formula trovata dà i risultati del problema 6.5, essendo $\theta = 45°$ per il quadrato e $\theta = 30°$ per l'esagono. Si verifica anche che se la massa è distribuita lungo il perimetro il momento d'inerzia raddoppia, risultato che si conserva al limite: un anello ha momento d'inerzia doppio rispetto a un disco (a parità di raggio e massa).

6.7. *Calcolare il momento d'inerzia rispetto ad un asse coincidente con un lato per un triangolo generico.*

Utilizziamo una segmentazione del triangolo diversa da quella del problema 6.3. Lo suddividiamo in strisce ortogonali al lato a, larghe dx e alte $x\mathrm{tg}\theta$: nella rotazione



queste di comportano come aste che ruotano rispetto ad un estremo e quindi

$$dI = \frac{1}{3} dm\, d^2 = \frac{1}{3}(\rho x \mathrm{tg}\,\theta dx)(x^2 \mathrm{tg}^2\,\theta) = \frac{1}{3}\rho \mathrm{tg}^3\,\theta x^3 dx \ .$$

Integriamo da zero a x_1 ottenendo

$$I_1 = \frac{1}{3}\rho \mathrm{tg}^3\,\theta \frac{x_1^4}{4} = \frac{1}{12}\rho h^3 x_1$$

in quanto $x_1 \mathrm{tg}\,\theta = h$. Il risultato è analogo per l'altra parte del triangolo e sommando

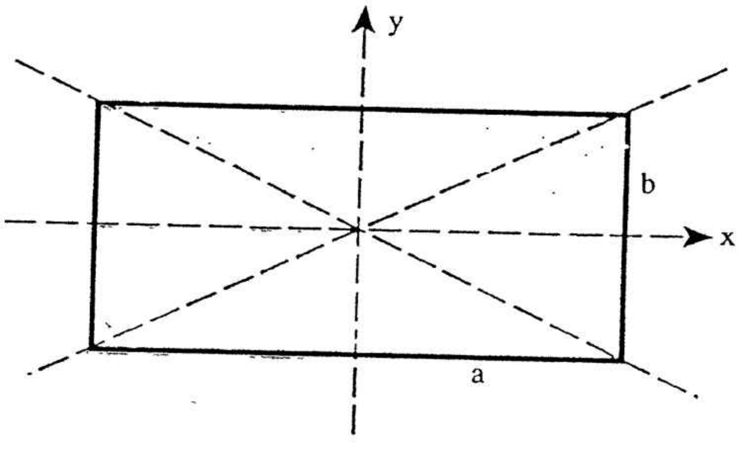
$$I = I_1 + I_2 = \frac{1}{12}\rho h^3 x_1 + \frac{1}{12}\rho h^3 x_2 = \frac{1}{12}\rho h^3 a = \frac{1}{6}\rho h^2 S$$

essendo $S = \frac{1}{2}ah$ l'area del triangolo. Il prodotto ρS è la massa e in conclusione

$$I = \frac{1}{6} m h^2 \ .$$

Abbiamo già trovato nel problema 6.3 questo risultato per un triangolo equilatero. Vediamo che in effetti la formula si applica a qualsiasi triangolo per rotazioni rispetto a un lato, essendo h l'altezza relativa a quel lato.

6.8. *Calcolare i momenti d'inerzia di una lamina rettangolare di lati a e b e massa m rispetto a due assi coincidenti con i lati e agli altri 4 assi indicati in figura con linee tratteggiate, nonché all'asse z ortogonale al disegno e passante per il centro.*



Nelle rotazioni rispetto al lato a e all'asse x parallelo ad a passante per il centro ovvero per il centro di massa della lamina questa si comporta come una serie di aste parallele larghe dx e lunghe b per cui

$$I_a = \int \frac{1}{3} dm\, b^2 = \int_0^a \frac{1}{3}\rho b dx\, b^2 = \frac{1}{3}\rho a b^3 = \frac{1}{3} m b^2 \;;$$

in modo analogo si trova $I_x = \frac{1}{12} m b^2$ e i due risultati sono collegati dal teorema di H.-S. come per un'asta.

Rispetto al lato b e all'asse y

$$I_b = \frac{1}{3} m a^2 \;,\; I_y = \frac{1}{12} m a^2 \;;$$

utilizzando il risultato generale indicato nel problema 6.4 abbiamo

$$I_z = I_x + I_y = \frac{1}{12} m (a^2 + b^2) \;.$$

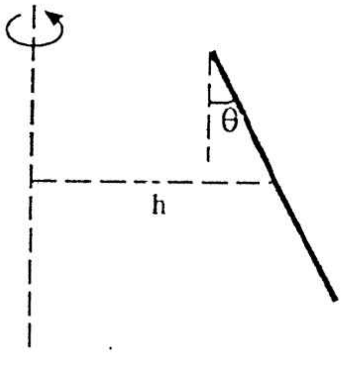
Per il calcolo del momento d'inerzia rispetto ad un asse coincidente con una diagonale ci serviamo del problema 6.7. Dividiamo il rettangolo in due triangoli con base sulla diagonale:

$$I = 2 \frac{1}{6} \frac{m}{2} h^2 = \frac{1}{6} m h^2 \;.$$

L'altezza h è tale che la lunghezza d della diagonale moltiplicata per h dà l'area del triangolo, cioè

$$S = ab = 2\left(\frac{1}{2} dh\right) = \sqrt{a^2 + b^2}\, h \;\Rightarrow\; h^2 = \frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2} \;,\; I = \frac{1}{6} m \frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2} \;.$$

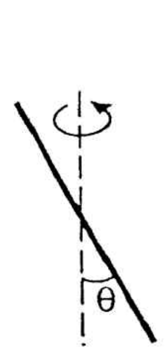
6.9. ***Calcolare il momento d'inerzia di un'asta di massa m e lunghezza d rispetto ad un asse formante un angolo ϑ con l'asta e distante h dal suo centro.***



Calcoliamo prima il momento d'inerzia rispetto ad un asse parallelo all'asse dato e passante per il centro dell'asta. Chiamiamo x la coordinata lungo l'asta con origine nel centro. Un elemento d'asta di lunghezza dx ha massa $dm = \rho dx$, essendo $\rho = m/d$ e dista dall'asse $x \operatorname{sen}\theta$ per cui

$$dI = dm(x\operatorname{sen}\theta)^2 = \rho\operatorname{sen}^2\theta\, x^2 dx \ .$$

Integriamo su mezza asta e moltiplichiamo per 2:

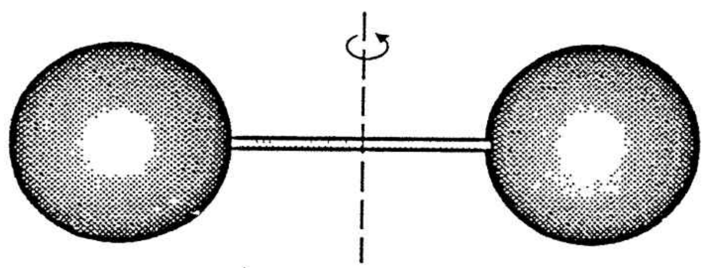


$$I = 2\int_0^{d/2} \rho\operatorname{sen}^2\theta\, x^2 dx = \frac{1}{12}\rho\operatorname{sen}^2\theta d^3 = \frac{1}{12}md^2\operatorname{sen}^2\theta \ .$$

Vediamo che se $\theta = \pi/2$ si ritrova $I = \frac{1}{12}md^2$.
Rispetto all'asse dato

$$I' = \frac{1}{12}md^2\operatorname{sen}^2\theta + mh^2 = m\left(\frac{1}{12}d^2\operatorname{sen}^2\theta + h^2\right) \ .$$

6.10. *Un corpo rigido è costituito da due sfere di massa M e raggio R, collegate da un'asta lunga d e di massa m, disposta lungo la retta che passa per i centri delle sfere. Calcolare il momento d'inerzia rispetto ad un asse passante per il centro dell'asta e a questa ortogonale.*



Il momento d'inerzia è la somma di tre contributi:

a) asta $\frac{1}{12}md^2$

b) sfere per ogni sfera si ha $\frac{2}{5}MR^2 + M\left(R + \frac{d}{2}\right)^2$.

In totale

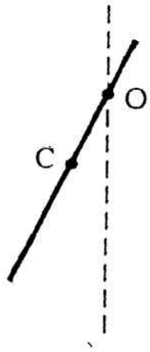
$$I = \frac{1}{12}md^2 + 2\left[\frac{2}{5}MR^2 + M\left(R + \frac{d}{2}\right)^2\right] = \left(\frac{1}{12}m + \frac{1}{2}M\right)d^2 + \frac{14}{5}MR^2 + 2MRd \ .$$

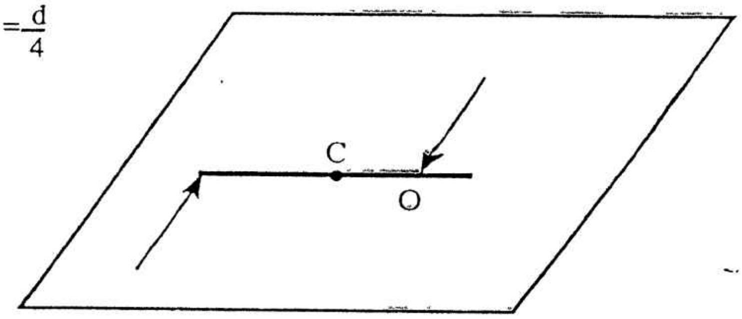
6.11 *Un corpo rigido è costituito da due dischi sottili coassiali, aventi la stessa densità, uno di raggio R e l'altro di raggio 2R; la massa totale è m. Calcolare il momento d'inerzia rispetto all'asse passante per il centro di massa del corpo e ortogonale ai dischi.*

Le masse dei due dischi sono $m_1 = \rho\pi R^2$ e $m_2 = \rho\pi 4R^2$, la loro somma vale m; quindi $m_1 = m/5$, $m_2 = 4m/5$ e

$$I=\frac{1}{2}\,\frac{m}{5}R^2+\frac{1}{2}\,\frac{4}{5}m4R^2=\frac{1}{10}mR^2+\frac{16}{10}mR^2=\frac{17}{10}mR^2 \ .$$

6.12. *Un'asta di massa $m = 5$kg e lunghezza d è sospesa in un piano verticale in modo da poter ruotare attorno ad un asse orizzontale passante per il punto O, distante $d/4$ dal centro dell'asta. Il periodo delle piccole oscillazioni vale $t = 1.94$s. La stessa asta viene poi appoggiata sopra un piano orizzontale liscio e ad essa viene applicata per un tempo $\Delta t = 10^{-2}$s una coppia di forze, con $F = 200$N, come in figura. Calcolare la velocità angolare dell'asta, precisando l'asse di rotazione.*





Quando è appesa l'asta si comporta come un pendolo composto e le piccole oscillazioni sono armoniche con periodo

$$T=2\pi\sqrt{\frac{I}{mgd/4}}=2\pi\sqrt{\frac{7d}{12g}} \ ,$$

avendo usato il teorema di H.-S. per esprimere I:

$$I=\frac{1}{12}md^2+m\left(\frac{d}{4}\right)^2=\frac{7}{48}md^2 \ .$$

Dal valore noto di T si ricava $d = 1.60$m.

L'azione della coppia di forze è espressa dal momento $M=\frac{3}{4}dF$ e nel tempo Δt essa provoca una variazione di momento angolare. Prendendo come polo il centro dell'asta, che coincide col centro di massa, e se l'asta inizialmente è ferma,

$$M\Delta t=I_c\,\omega \ ; \ I_c=\frac{1}{12}md^2 \ \Rightarrow \ \omega=\frac{9F\Delta t}{md}=2.25\text{rad/s} \ .$$

L'asse di rotazione, verticale, passa per il centro dell'asta che resta fermo. Esso ha infatti velocità iniziale nulla e la risultante delle forze esterne è nulla.

6.13. *Una tavola quadrata, di massa m, lato b e spessore trascurabile, viene fatta oscillare attorno ad un asse orizzontale che coincide con uno dei suoi lati. Il*