Cinematica del punto materiale

- Punto materiale
- Velocità e accelerazione
- Moto rettilineo uniforme
- Moto naturalmente accelerato
- Moto parabolico
- Moto armonico

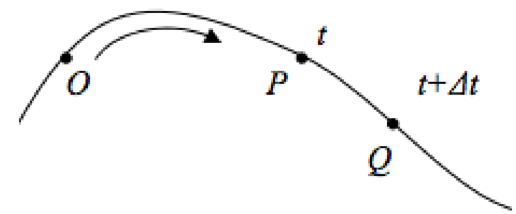
Antonio Pierro

Per consigli, suggerimenti, eventuali errori o altro potete scrivere una email a antonio.pierro[at]gmail.com

Punto materiale

- In Fisica, si definisce punto materiale un corpo privo di dimensioni, o le cui dimensioni sono trascurabili rispetto a quelle della regione di spazio in cui può muoversi e degli altri oggetti con cui può interagire.
- Esempio: se si vuole studiare il moto della Luna rispetto alla Terra, sia la Luna che la Terra possono essere approssimate a punti materiali, dato che le loro dimensioni sono molto più piccole rispetto alla loro distanza.

Velocità 1/2



- Consideriamo un punto mobile P sopra una qualsiasi linea.
- Se P si muove sulla curva al variare del tempo t, allora $\vec{s}$ sarà funzione di t e si scriverà: $\vec{s} = \vec{s}(t)$
- Se dopo un intervallo di tempo Δt, cioè all'istante t + Δt, il punto mobile si troverà in Q, lo spazio percorso a quell'istante sarà:
$$\vec{s}(t + \Delta t)$$
- Osserviamo dunque che all'incremento Δt della variabile tempo corrisponde, per lo spazio, l'incremento:
$$\Delta\vec{s} = \vec{s}(t + \Delta t) - \vec{s}(t)$$
che rappresenta lo spazio percorso da P nel tempo Δt

Velocità 2/2

- Si definisce velocità media del punto mobile:

$$\frac{\Delta\vec{s}}{\Delta t} = \frac{\vec{s}(t+\Delta t) - \vec{s}(t)}{\Delta t}$$

- Facciamo tendere a zero l'incremento Δt del tempo:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{s}(t+\Delta t) - \vec{s}(t)}{\Delta t}$$

- Si definisce velocità istantanea la derivata dello spazio rispetto al tempo:

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{s}}{\Delta t} = \frac{d\vec{s}}{dt} = \vec{s}\,'$$

Accelerazione 1/2

- La velocità istantanea è una funzione del tempo t e quindi nell'intervallo Δt di tempo subirà la variazione:

$$\Delta\vec{v} = \vec{v}(v + \Delta t) - \vec{v}(t)$$

- Si definisce <u>accelerazione media</u> del punto materiale:

$$\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{\vec{v}(t + \Delta t) - \vec{v}(t)}{\Delta t}$$

- Si definisce <u>accelerazione istantanea</u> la derivata della velocità rispetto al tempo:

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{v}'$$

Accelerazione 2/2

- L'accelerazione istantanea è la derivata della velocità rispetto al tempo e quindi è la derivata seconda dello spazio percorso rispetto al tempo.

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\frac{d\vec{s}}{dt} = \frac{d^2\vec{s}(t)}{dt^2} = \vec{s}''(t)$$

Moto rettilineo uniforme 1/2

- Un corpo si muove di moto rettilineo e uniforme se mantiene una velocità costante in modulo, direzione e verso.
- Legge oraria del moto rettilineo e uniforme:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{s}}{dt} \Rightarrow d\vec{s} = \vec{v}dt \Rightarrow \int_{s_0}^{s} d\vec{s} = \int_{t_0}^{t} \vec{v}dt$$

$$t_0 = 0 \Rightarrow \vec{s} - \overrightarrow{s_0} = \vec{v} * t \Rightarrow \vec{s} = \overrightarrow{s_0} + \vec{v} * t$$

Moto rettilineo uniforme 2/2

Moto rettilineo uniformemente accelerato 1/2

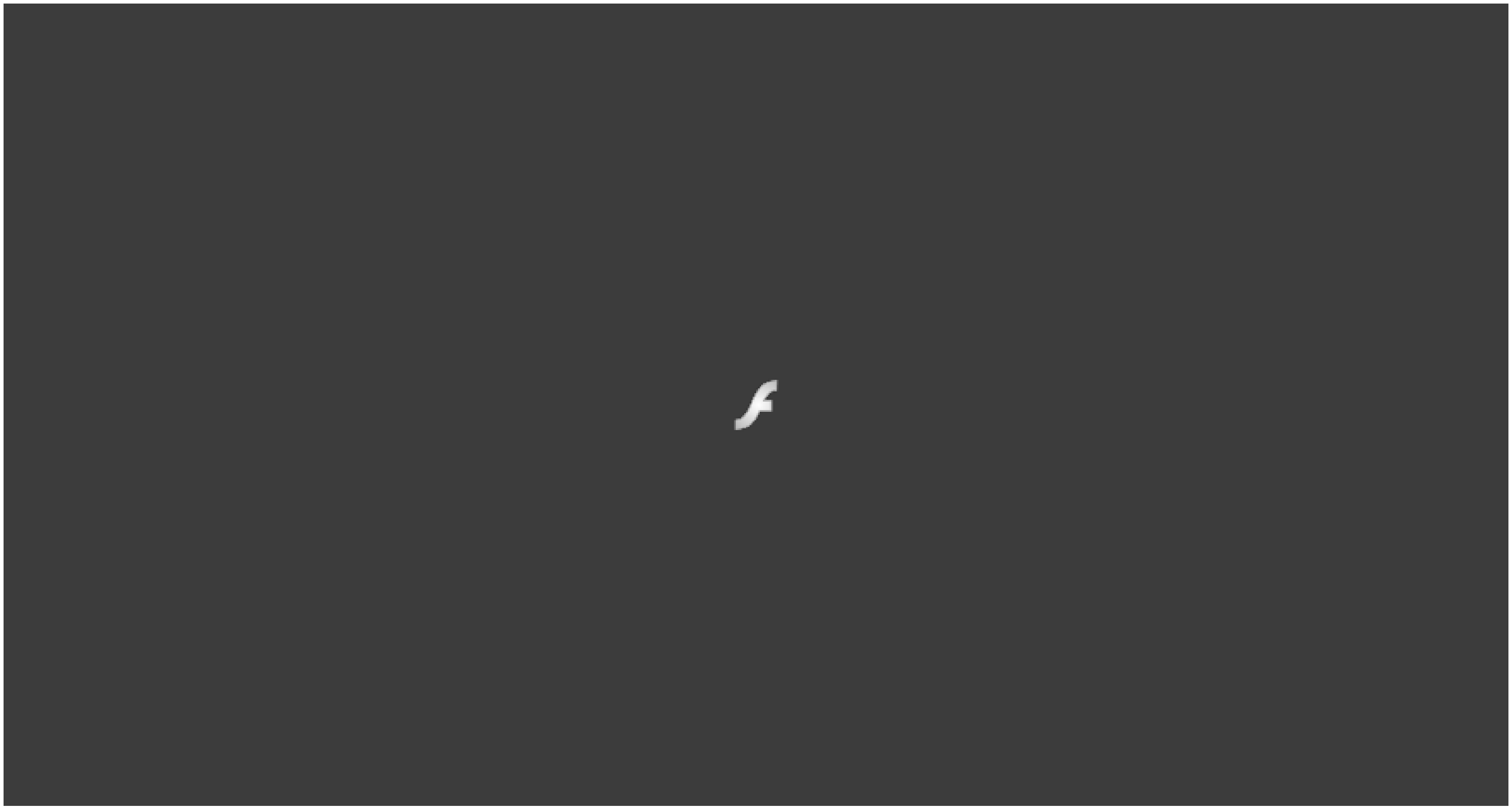
- Un corpo si muove di <u>moto rettilineo uniformemente accelerato</u> se mantiene una accelerazione costante in modulo, direzione e verso.
- <u>Legge oraria</u> del moto rettilineo uniformemente accelerato:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} \Rightarrow d\vec{v} = \vec{a}\,dt \Rightarrow \int_{v_0}^{v} d\vec{v} = \int_0^t \vec{a}\,dt \Rightarrow \vec{v} = \overrightarrow{v_0} + \vec{a}\,t$$

$$\frac{d\vec{s}}{dt} = \overrightarrow{v_0} + \vec{a}\,t \Rightarrow d\vec{s} = \overrightarrow{v_0}dt + \vec{a}\,tdt \Rightarrow$$

$$\int_{s_0}^{s} \vec{s}\,ds = \int_0^t \overrightarrow{v_0}dt + \int_0^t \vec{a}\,tdt \Rightarrow \vec{s} = \overrightarrow{s_0} + \overrightarrow{v_0}t + \frac{1}{2}\vec{a}t^2$$

Moto rettilineo uniformemente accelerato 2/2



Moto parabolico

- Il moto parabolico è un tipo di moto bidimensionale esprimibile attraverso la combinazione di due moti rettilinei simultanei e indipendenti:
  - moto rettilineo uniforme
  - moto uniformemente accelerato.
- Si dimostra che la traiettoria del moto parabolico rappresenta una parabola.

Traiettoria del moto parabolico

- Si supponga che un corpo sia lanciato con velocità iniziale v_0 e con un angolo θ rispetto all'asse x orizzontale.
- Il vettore velocità può essere scomposto lungo le due componenti x e y:

$$\overrightarrow{v_0} = v_0 cos(\theta)\vec{i} + v_0 sen(\theta)\vec{j}$$

- Le leggi orarie dei moti lungo gli assi x e y sono:

$$x(t) = v_0 cos(\theta), \quad y(t) = v_0 sin(\theta)t - \frac{1}{2}gt^2$$

- Esplicitando il parametro t dalla legge oraria x(t) e sostituendo in y(t) si ottiene una parabola con concavità rivolta verso il basso:

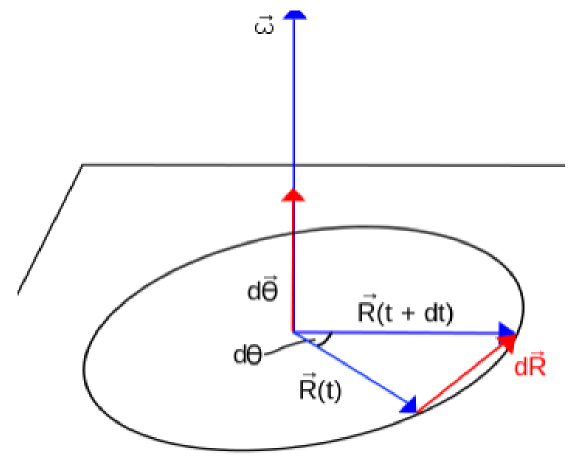
$$y = x * tang\theta - \frac{g}{2v_0^2 cos^2(\theta)} * x^2$$

Animazione del moto parabolico

Moto circolare

- Il moto circolare è il moto di un punto materiale lungo una circonferenza.
- Lo spostamento lineare del punto sulla circonferenza $d\vec{R}$ sarà legato allo spostamento angolare $d\theta$:

$$d\vec{R} = d\vec{\theta} \times \vec{R}$$



- La velocità angolare è definita come la derivata, rispetto al tempo, del vettore spostamento angolare:

$$\vec{\omega} = \frac{d\vec{\theta}}{dt} \left[\frac{rad}{s}\right] \Rightarrow \vec{v}(t) = \frac{d\vec{R}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{R}$$

Moto circolare uniforme

- Un corpo si muove di moto circolare uniforme se mantiene una velocità angolare costante in modulo, direzione e verso.

$$\vec{\omega} = \frac{d\vec{\theta}}{dt} = costante \Rightarrow d\vec{\theta} = \vec{\omega} * dt$$

$$\int_{\theta_0}^{\theta} d\vec{\theta} = \int_{o}^{t} \vec{\omega} * dt \Rightarrow \theta = \theta_0 + \omega * t$$

Moto circolare uniformemente accelerato

- Un corpo si muove di moto circolare uniformemente accelerato se mantiene un' accelerazione angolare in modulo, direzione e verso costante.

$$\vec{\alpha} = \frac{\vec{\omega}}{dt} = cost$$

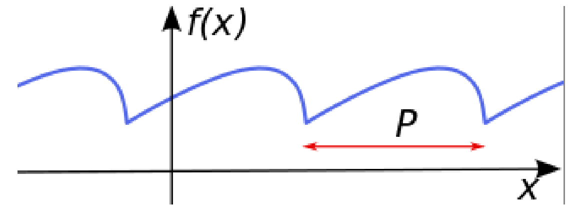
- Integrando l'equazione differenziale $\vec{\omega}(t) = \vec{\alpha} * dt$:

$$\omega(t) = \omega_0 + \alpha * t$$

$$\theta(t) = \theta_0 + \omega_0 * t + \frac{1}{2}\alpha * t^2$$

Moto armonico - funzione periodica

- In Matematica una funzione si dice periodica se assume valori che si ripetono esattamente a intervalli regolari.



$$f : A -> B \text{ periodica di periodo T } \iff$$
$$\forall x \in A : f(x) = f(x + T)$$

- Le funzioni trigonometriche seno e coseno sono periodiche di periodo 2π.

Moto Armonico 1/2

- Si definisce moto armonico il moto di un punto materiale la cui legge oraria è una funzione periodica del tipo:
$$x(t) = Asen(\omega t + \phi_0)$$
dove A è l'ampiezza dell'oscillazione, ϕ_0 è la fase iniziale e ω è la pulsazione
- Per un moto armonico così definito si dimostra che il periodo è:
$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

Moto Armonico 2/2

- La velocità e l'accelerazione sono rispettivamente la derivata prima e seconda della legge oraria, ovvero:

$$v(t) = \frac{dx(t)}{dt} = \omega A cos(\omega t + \phi);$$

$$d(t) = \frac{dv(t)}{dt} = -\omega^2 A sin(\omega t + \phi);$$

Rappresentazione grafica del moto armonico 1/2

Rappresentazione grafica del moto armonico 2/2