Dinamica del corpo rigido

- Definizione di corpo rigido
- Moto di un corpo rigido
- Densità
- Momento angolare
- Momento d'inerzia

Antonio Pierro

Per consigli, suggerimenti, eventuali errori o altro potete scrivere una email a antonio.pierro[at]gmail.com

Definizione di corpo rigido

- Un corpo rigido è un sistema di punti materiali in cui le distanze tra tutte le possibili coppie di punti non possono variare.
- Quanti parametri occorrono per descrivere il moto di un corpo rigido?

Gradi di libertà di un sistema

- Il numero di parametri necessari per descrive il moto di un sistema si chiama numero di gradi di libertà del sistema.
- Un punto materiale ha tre gradi di libertà (le tre coordinate x, y, z).
- N punti materiali indipendenti hanno 3*N gradi di libertà.

Gradi di libertà di un corpo rigido

- Nel caso di un corpo rigido la condizione che le distanze tra tutte le possibili coppie di punti siano costanti, riduce i gradi di libertà del sistema da 3N (dove N è il numero di particelle) a 6.

$$\forall i, j | i \neq j : (x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 + (z_i - z_j)^2 - d_{ij}^2 = 0$$

- Infatti, definita la "forma" del corpo rigido, a ogni istante la sua posizione è individuabile da sei valori: tre coordinate di un punto, tre coseni direttori di rotazione intorno agli assi x, y, z solidali al corpo.
- I coseni direttori sono proprio i coseni che la direzione della retta forma con gli assi cartesiani.

Moto di un corpo rigido

- Moto di traslazione: tutti i punti si muovono con la stessa velocità $\vec{v}$ che coicide con $\overrightarrow{v_{cm}}$
  - L'equazione del moto sarà: $\vec{R} = M * \overrightarrow{a_{cm}}$
- Moto di rotazione: tutti i punti descrivono un moto circolare con velocità angolare ω
  - L'equazione del moto sarà: $\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt}$
- La combinazione dei due moti è definita come moto di rototraslazione.

Corpo continuo

- Supponiamo che il corpo abbia una struttura continua (non consideriamo il livello atomico).
- Consideriamo un elemento di volume infinitesimo dV del corpo e sia dm la massa contenuta in tale volume.
- Si definisce densità del corpo la quantità $\rho = \frac{dm}{dV}$ (dove il volume dV è abbastanza piccolo affinché le proprietà del corpo siano uniformi).
- La massa del corpo sarà:

$$m = \int_V \rho dV = \int_V \rho(x, y, z) dx dy dz$$

Centro di massa di un corpo continuo

- Se ora vogliamo calcolare la posizione del centro di massa di un corpo continuo, dobbiamo semplicemente dividerlo in parti infinitesime e effettuarne la media pesata. Quindi:

$$\overrightarrow{r_{cm}} = \frac{\int_V \vec{r} * dm}{M} = \frac{\int_V \vec{r} * \rho * dV}{M}$$

Momento d'inerzia per un sistema di n punti materiali

- Sia l'asse z, l'asse di rotazione di un corpo rigido formato da n punti materiali.

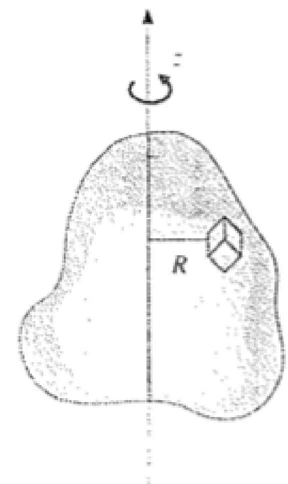
$$\vec{L} = \sum_{n=1}^{n} \overrightarrow{L_i} = (\sum_{n=1}^{n} \overrightarrow{r_i} \times m_i \overrightarrow{v_i}) = (\sum_{n=1}^{n} m_i r_i^2)\vec{\omega} = I_z \vec{\omega}$$

- Il coefficiente I_z si chiama momento d'inerzia del corpo rispetto all'asse z.

$$I_z = \sum_{n=1}^{n} m_i r_i^2 = \sum_{n=1}^{n} m_i (x_i^2 + y_i^2)$$

Momento d'inerzia per un corpo continuo

- Il momento d'inerzia per un corpo continuo si deduce da quello di un sistema rigido formato da n punti materiali:



$$I_z = \sum_{n=1}^{n} m_i R_i^2 \Rightarrow I_z = \int_V R^2 dm = \int_V \rho R^2 dV = \int_V \rho (x^2 + y^2) dV$$

Esempi di corpi con densità di massa lineare

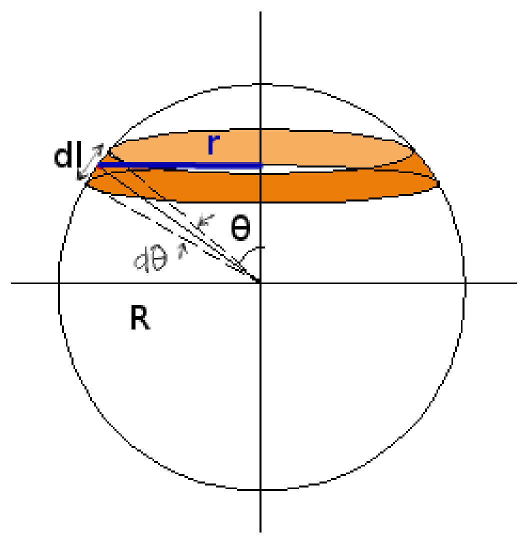
1. Calcolo del momento d'inerzia di un anello di densità lineare $\lambda = \frac{m}{2\pi R}$:
$$I = \int R^2 dm = \int \lambda R^2 dl = \lambda R^2 \int dl = \lambda R^2 2\pi R = mR^2$$
2. Calcolo del momento d'inerzia di una sbarra omogenea di densità lineare $\lambda = \frac{m}{L}$
$$I = \int x^2 dm = \int_{-L/2}^{L/2} x^2 \lambda dx = \lambda [\frac{x^3}{3}]_{-L/2}^{L/2} = \frac{1}{12} mL^2$$

Esempi di corpi con densità di massa superficiale

- Momento d'inerzia di una sfera avente densità superficiale σ:

$$\sigma = \frac{m}{4\pi R^2} \qquad r = R\sin\theta \qquad dl = Rd\theta \qquad \int_0^\pi (\sin\theta)^3 d\theta = \frac{4}{3}$$

$$I = \int r^2 dm = \sigma \int_S r^2 dS = \sigma \int_0^\pi R^2 \sin\theta^2 2\pi R \sin\theta R d\theta = \frac{2}{3} M R^2$$



Esempi di corpi con densità di massa volumetrica

1. Momento d'inerzia di un cilindro di densità $\rho = \frac{m}{\pi R^2 h}$:

$$I = \int r^2 dm = \int_0^R r^2 \rho \pi h r dr = \frac{1}{2} mR^2$$

2. Momento d'inerzia di una sfera piena di densità ρ:
   se si scompone un solido in parti di qualunque forma, il momento d'inerzia totale rispetto a un asse dato è la somma dei momenti d'inerzia delle singole parti rispetto allo stesso asse.

$$I = \int dI = \int_0^M \frac{2}{3} r^2 dm \quad \rho = \frac{m}{\frac{4}{3}\pi R^3} \; dV = 4\pi r^2 dr$$

$$I = \int dI = \frac{2}{3} \rho \int_0^R r^2 4\pi r^2 dr = \frac{2}{5} MR^2$$

Teorema di Huygens-Steiner

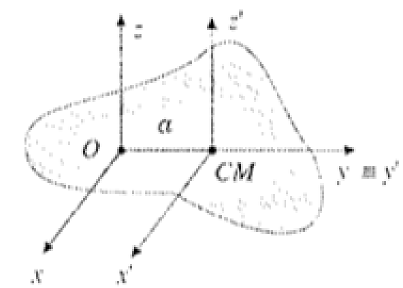
- Nei precedenti esempi, per il calcolo dei momenti d'inerzia, abbiamo scelto particolari assi (passanti per il centro di massa) che ci hanno permesso di semplificare il calcolo.
- Il teorema di Huygens-Steiner stabilisce che il momento d'inerzia di un corpo di massa m rispetto a un asse che si trova a una distanza d dal centro di massa del corpo è dato da

$$I = I_{cm} + md^2$$

- I_{cm} è il momento d'inerzia del corpo rispetto a un asse parallelo al primo e passante per il centro di massa.

Dimostrazione del teorema di Huygens-Steiner

- Per dimostrare il teorema consideriamo due assi z e z', tra loro paralleli, distanti "a" e con asse z' passante per il centro di massa.
- Per un generico punto P_i, il momento d'inerzia rispetto all'asse z sarà:



$$m_i(x_i^2 + y_i^2), \quad x = x', \quad y = y' + a, \quad z = z'$$

- Se sommiamo i momenti d'inerzia di tutti i punti:

$$I = \sum_i m_i(x_i^2 + y_i^2) = \sum_i (x_i'^2 + (y_i' + a)^2) \Rightarrow$$

$$I = \sum_i (x_i'^2 + y_i'^2) + \sum_i m_i a^2 + 2a \sum_i m_i y_i' = I_{z'} + ma^2$$

$$\text{Sapendo che} \quad 2a \sum_i m_i y_i' = m y_{cm}' = 0$$

Momenti d'inerzia rispetto ad assi passanti per il bordo

Anello di raggio r $\Rightarrow I_{cm} = mr^2 \Rightarrow I_{bordo} = 2mr^2$

Disco di raggio r $\Rightarrow I_{cm} = \frac{1}{2}mr^2 \Rightarrow I_{bordo} = \frac{3}{2}mr^2$

Sfera di raggio r $\Rightarrow I_{cm} = \frac{2}{5}mr^2 \Rightarrow I_{bordo} = \frac{7}{2}mr^2$

Asta lunga d $\Rightarrow I_{cm} = \frac{1}{12}md^2 \Rightarrow I_{bordo} = \frac{1}{3}md^2$