CONSERVAZIONE DELL'ENERGIA MECCANICA
esercizi risolti

Classi terze L.S.

In questa dispensa verrà riportato lo svolgimento di alcuni esercizi inerenti il principio di conservazione dell'energia meccanica, uno strumento molto potente per trattare svariatissime situazioni di moto di corpi, in maniera semplice.

Riprendiamo alcuni concetti utili.

- `energia`: grandezza fisica caratteristica di un sistema, che permette la produzione di lavoro. Per questo motivo si misura in Joule (come il lavoro)
- `energia meccanica`: di un sistema è la somma di tutte le forme di energia possedute dal sistema stesso
- `energia cinetica`: forma di energia associata al movimento di un corpo, pari al lavoro speso dalla forza motrice per dotare il corpo di massa m della velocità v. In formule:

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2$$

- `energia potenziale gravitazionale`: forma di energia posseduta da un corpo di massa m che si trova all'altezza h rispetto ad una prefissata quota di riferimento. E' pari al lavoro speso contro la forza-peso per innalzare la massa a quella altezza (lavoro di sollevamento) o anche al lavoro che la forza peso farebbe per far cadere (liberamente) la massa m dall'altezza h. In formule:

$$E_P = m \cdot g \cdot h$$

ove g è l'accelerazione di gravità, in questa dispesa assunta costante pari a $g = 9,81 m/s^2$.

- `energia potenziale elastica`: forma di energia posseduta da un corpo dotato di proprietà elastiche allorquando viene deformato di Δs. Se K è la sua costante elastica, è pari al lavoro speso contro la forza di richiamo per produrre la defomazione e vale:

$$E_{el} = \frac{1}{2}K \cdot \Delta s$$

- `conservazione dell'energia meccanica [PCEM]`: principio o legge di conservazione che ci dice che in un sistema `isolato` (tale per cui le forze esterne sono ininfluenti, ovvero tale per cui non avvengono scambi di energia col contesto) l'energia totale si conserva nel tempo (tutt'al più, mutando forma). In particolare, per tutti i fenomeni divisibili temporalmente in due momenti (il "prima" 1 e il "dopo" 2), si può dire che:

$$E_{tot_1} = E_{tot_2}$$

---

1 Conversione cinetica $\Leftrightarrow$ potenziale

1.1 cinetica $\rightarrow$ potenziale

In questo esercizio vediamo come l'energia cinetica di un corpo dotato di velocità si può convertire in energia potenziale per permettere di superare o meno un certo dislivello.

Un corpo di massa $m = 1\ Kg$ si muove alla velocità di $v_0 = 2m/s$ su un piano privo di attrito. Ad un certo punto affronta una salita di dislivello $\Delta h = 1m$. Dimostrare che il corpo non riesce ad arrivare in cima. Che velocità dovrebbe avere per raggiungere la sommità della salita a velocità nulla? E se la velocità residua fosse di $v_f = 1\ m/s$

Osserviamo subito che se il testo del problema dice esplicitamente di trascurare gli attriti, il sistema è da considerarsi isolato e quindi possiamo applicare il PCEM.

Dividiamo il fenomeno in due parti:

- Inizio o 1: il corpo si muove di velocità v_0. La sua energia totale è puramente cinetica, visto che non compie dislivelli
- Fine o 2. Dopo aver affrontato la salita, il corpo giunge alla quota finale. L'energia cinetica iniziale si deve trasformare in potenziale, producendo un lavoro di sollevamento fino alla quota h compatibile con l'ammontare di energia iniziale

E' chiaro che ad ogni quota è associata una certa energia potenziale, per cui, valendo PCEM, tutta l'energia cinetica della fase 1 deve trasferirsi in potenziale, ossia $E_1 = E_2$. La pallina riuscirà ad arrivare alla quota h allorquando:

$$E_c \geq E_p$$

ove E_c designa l'energia cinetica iniziale e E_P l'energia potenziale associata alla quota h. In caso contrario, l'ammontare di energia cinetica non sarà sufficiente per produrre lavoro di sollevamento alla quota richiesta e la pallina si fermerà prima.

Nel nostro caso:

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2^2 = 2J$$

mentre

$$E_P = m \cdot g \cdot h = 1 \cdot 9,81 \cdot 1 = 9,81J$$

Essendo $E_c < E_P$ la pallina non riesce a superare il dislivello, ma si fermerà alla quota $\overline{h}$ che compete all'ammontare di energia cinetica iniziale. Tale quota è data da:

$$\frac{1}{2}mv^2 = mg\overline{h} \Rightarrow \overline{h} = \frac{1}{2}\frac{v^2}{g} = 0,2m$$

Per calcolare la velocità iniziale v_0 che deve possedere la pallina, basta scrivere:

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = m \cdot g \cdot h \Rightarrow v_0 = \sqrt{2gh} = \sqrt{2 \cdot 9,81 \cdot 1} = 4,43m/s$$

Se la pallina possiede esattamente questa velocità, tutta la sua energia cinetica della fase iniziale si trasforma in energia potenziale e quindi essa arriverà alla fine della salita con velocità pari a zero.

Se vogliamo infine che la velocità finale non sia zero, ma v_f, dobbiamo specificare che nella fase 2 deve rimanere un "residuo" di energia cinetica, cosicchè l'energia meccanica finale è data da:

$$E_2 = E_P + E_c = mgh + \frac{1}{2}mv_f^2$$

Applicando la conservazione, visto che $E_1 = E_2$, si ha:

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = mgh + \frac{1}{2}mv_f^2 \Rightarrow v_0 = \sqrt{2 \cdot g \cdot h + v_f^2} = \sqrt{2 \cdot 9,81 \cdot 1 + 1} = 4,54m/s$$

1.2 potenziale gravit.→ cinetica

Il metodo migliore per dotare una massa di velocità consiste nel farla scendere lungo un dislivello Δh secondo un cammino qualsiasi (caduta libera o piano di inclinazione qualsivoglia): difatti, essendo la forza peso una forza conservativa, il lavoro che essa produce sulla massa (e quindi l'energia cinetica che le imprime) non dipende dal cammino che la massa compie.

Un corpo di massa $m = 1,5$ Kg scende lungo un piano inclinato, partendo da fermo, superando un dislivello $\Delta h = 1m$. Con quale velocità arriva in fondo alla discesa? Da che altezza lo devo far scendere se voglio che la sua velocità finale sia di $v_f = 4m/s$? Si supponga di trascurare gli attriti

Al solito, dividiamo il fenomeno in due momenti:

- Inizio o 1: il corpo è in cima alla salita in quiete ed inizia scendere. La sua energia è tutta potenziale, dovuto alla sua quota $h = 1$m rispetto al piano orizzontale, preso come quota di riferimento.
- Fine o 2. Dopo aver affrontato la discesa, il corpo è stato accelerato dalla forza peso, che ha compiuto un lavoro pari all'energia potenziale del punto precedente, dotandolo di energia cinetica e quindi di velocità v_f.

L'energia potenziale gravitazionale della fase 1 si calcola:

$$E_1 = E_p = mgh = 1,5 \cdot 9,81 \cdot 1 = 14,7J$$

Questa energia, valendo PCEM, deve convertirsi totalmente in energia cinetica, dunque:

$$E_p = E_c = \frac{1}{2}mv_f^2 \Rightarrow 9,81 = \frac{1}{2}mv_f^2 \Rightarrow v_f = \sqrt{\frac{14,7 \cdot 2}{1,5}} = 4,43m/s$$

Se voglio che la sua velocità v_f sia invece solo 4 m/s, dovrò partire da una quota sicuramente più bassa, in modo tale che, al solito:

$$\frac{1}{2}mv_f^2 = mgh$$

e quindi:

$$h = \frac{1}{2}\frac{v_f^2}{g} = 0,81m$$

2 conversione cinetica ⇔ potenziale elastica

In questi due esercizi vediamo come l'energia cinetica di un corpo dotato di velocità, si può convertire in energia potenziale elastica di compressione di una molla e viceversa

2.1

Un dispositivo di lancio è costituito da una molla di costante $K = 30$ N/m che, compressa di 3 cm, agisce su una pallina di massa $m = 50g$ spingendola lungo un piano privo di attrito. Se la pallina parte da ferma, che velocità finale raggiunge?

In questa situazione possiamo affermare che, non essendoci attriti, tutta l'energia potenziale elastica immagazzinata nella molla a causa della compressione si trasferisce alla pallina, dotandola di velocità v.

Al solito, dividiamo il fenomeno in due parti:

1. Fase iniziale, in cui la molla è compressa di $\Delta s = 3$cm. L'energia meccanica del sistema molla+pallina è puramente potenziale elastica, visto che la pallina ha $v = 0$. Quindi:

$$E_1 = \frac{1}{2}K \cdot \Delta s^2 = 0,0135J$$

2. Fase finale, in cui la molla è tornata alle dimensioni iniziali (quindi si è "scaricata" della sua energia potenziale elastica), trasferendo l'energia alla pallina. L'energia meccanica del sistema è puramente cinetica, dovuta alla velocità assunta dalla pallina, dunque:

$$E_2 = \frac{1}{2}m \cdot v^2$$

Valendo PCEM, possiamo eguagliare le due energie, ottenendo l'equazione:

$$\frac{1}{2}K \cdot \Delta s^2 = \frac{1}{2}mv^2$$

ossia

$$0,0135 = \frac{1}{2}m \cdot v^2 \Rightarrow v = \sqrt{\frac{2 \cdot 0,0135}{m}} = 0,735m/s$$

2.2

Un corpo di massa $m = 2Kg$ viene accelerato sopra una superficie piana e liscia, partendo da fermo, da una forza costante di $1N$ che agisce per $\Delta t = 2$ secondi e poi lasciato libero. Al termine della superficie è presente un respingente consistente in una molla di costante $K = 100N/m$. contro il quale il corpo va ad urtare, fermandosi. Determinare la compressione Δs della molla, prima che ritorni alle dimensioni iniziali.

Se può essere agevole, si divida il fenomeno in due momenti.

Nella fase 1, è ovvio che il corpo, se parte da fermo, viene accelerato dalla forza costante F che lo spinge per 2 secondi. Al termine della spinta, il corpo ha raggiunto una certa velocità, quindi è stato dotato di energia cinetica.

Questa energia viene poi perduta nella fase 2, perchè nell'urto con la molla essa si trasferisce in lavoro di compressione, ossia viene immagazzinata in energia potenziale elastica, fornendo al dispositivo una certa compressione Δs.

Calcoliamo inizialmente l'ammontare dell'energia cinetica di cui la massa è dotata della prima fase.

Se la forza accelerante vale $F = 1$N, l'accelerazione uniforme vale, per la seconda legge della dinamica:

$$a = \frac{F}{m} = 0,5 m/s^2$$

Si può procedere ora in due modi, per calcolare l'energia cinetica:

1. la si calcola come lavoro della forza F per produrre lo spostamento s della massa, ove s è calcolato con la legge oraria del moto uniformemente accelerato, e cioè, partendo il corpo da fermo:

   $$s = \frac{1}{2}at^2 = \frac{1}{2}0,5 \cdot 2^2 = 1m$$

   Dunque :

   $$E_c = L = F \cdot s = 1 \cdot 1 = 1J$$

2. Oppure si calcola direttamente la velocità finale raggiunta dal corpo e poi si usa la formula che dà subito l'energia cinetica. La velocità v_f raggiunta dal corpo vale:

   $$v_f = v_0 + a \cdot t = 0 + 0,5 \cdot 2 = 1m/s$$

   Quindi l'energia cinetica vale:

   $$E_c = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 1 = 1J$$

Ora, nella fase 2, tutta questa energia deve trasferirsi totalmente, essendo trascurabili gli attriti, in energia potenziale elastica della molla, quindi, per il PCEM:

$$E_1 = E_2 \Rightarrow 1J = \frac{1}{2}K \cdot \Delta s^2 \Rightarrow \Delta s = \sqrt{\frac{1 \cdot 2}{K}} = \sqrt{\frac{1 \cdot 2}{100}} = 0,141m$$

3 Conversione potenziale el. $\Leftrightarrow$ potenziale grav.

3.1 pot.grav. $\rightarrow$ pot. elastica

E' l'esempio dei dispositivi di lancio a molla, in cui un corpo viene sparato verticalmente oppure lungo un piano inclinato da una molla.

Un dispositivo di lancio è costituito da una molla di costante $K = 10$ N/m che agisce su una pallina di massa $m = 0,1$ Kg. Se la molla viene compressa di $\Delta s = 0,02$ m, a che altezza h arriva la pallina? Quanto devo comprimere la molla se voglio che l'altezza finale sia 2 m? Che costante elastica dovrebbe avere una molla che, comprimendosi di 10 cm porta la pallina (stessa massa) esattamente a 1 m di altezza?

Qui nella fase 1 la pallina è attaccata alla molla, che compressa di 2 cm è stata caricata di energia potenziale elastica.

L'energia potenziale elastica di cui è caricata la molla a causa della compressione vale:

$$E_1 = \frac{1}{2}K\Delta s^2 = 0,1J$$

Questa energia si trasforma, grazie al PCEM che vale in quanto trascuro gli attriti, totalmente in energia potenziale gravitazionale, consentendo al corpo di giungere alla quota massima h tale che:

$$0,1 = mgh \Rightarrow h = \frac{0,1}{m \cdot g} = 0,1m$$

Se si vuole che l'altezza finale sia di $h = 2m$ la molla deve essere maggiormente compressa. In tal caso calcoliamo quanta energia potenziale gravitazionale deve avere la pallina a 2 m di quota.

$$E_p = mgh = 0,1 \cdot 9,81 \cdot 2 = 1,962J$$

Questo ammontare di energia deve essere fornita dalla compressione della molla Δs, tale che:

$$\frac{1}{2}K\Delta s^2 = 1,962J \Rightarrow \Delta s = \sqrt{\frac{2 \cdot 1,962}{K}} = 0,63m$$

Infine, si può calcolare anche quale deve essere la K di una molla compressa di 10 cm che porta la pallina a 1 m di altezza.

Eguagliando le espressioni delle energie potenziali, si ha:

$$\frac{1}{2}K\Delta s^2 = mgh \Rightarrow K = \frac{2 \cdot mgh}{\Delta s^2} = 196,2N/m$$

3.2 potenziale grav. $\rightarrow$ potenziale el.

Un corpo di massa $m = 1Kg$ cadendo liberamente da un'altezza di 50 cm, di quanto comprime una molla di $K = 243$ N/m che si trova ad h=0?

In questo problema abbiamo un corpo in caduta libera che va a comprimere una molla al termine della caduta.

In situazioni del genere possiamo porre lo zero del potenziale gravitazionale nel punto in cui la molla ha la massima compressione, trascurando quindi la variazione di potenziale dovuta alla diminuzione di quota della molla.

E' ovvio che tutta l'energia potenziale gravitazionale posseduta all'inizio del moto di caduta si deve trasferire in energia potenziale elastica della molla, causandone una compressione Δs tale che:

$$mgh = \frac{1}{2}K\Delta s^2 \Rightarrow \Delta s = \sqrt{\frac{2mgh}{K}} = 0,2m$$

---

4 Quando non si conserva l'energia: sistemi dissipativi

Le condizioni di applicabilità del PCEM sono del tutto irreali: nella pratica, è impossibile osservare sistemi perfettamente isolati, visto che l'azione delle forze non conservative (ovvero, in ultima analisi, gli attriti) è sempre presente.

In ogni caso il PCEM può essere un valido strumento per studiare, al contrario, la "non conservazione" dell'energia meccanica: è sensato pensare che, allorquando viene violata la conservazione, l'energia perduta è stata dissipata dalle forze di attrito.

In ultima analisi, effettuando un bilancio energetico è possibile risalire all'entità delle forze non conservative che interessano il sistema: basterà vedere di quanto è variata l'energia meccanica del sistema tra la fase finale e quella iniziale (calcolando, in definitiva, un ΔE) e porre uguale questo valore al *lavoro* delle forze dissipative. In altre parole:

$$L_{attriti} = \Delta E$$

4.1 azione delle forze di attrito

Un sistema per evidenziare la presenza degli attriti potrebbe essere quello indicato nell'esempio semi-ideale seguente.

Una massa di $m = 0,3$ Kg viene fatta scendere lungo un piano inclinato con attrito, che supera un dislivello di $h = 22cm$. Al termine della discesa, il corpo procede muovendosi sopra una rotaia a cuscino d'aria che minimizza gli attriti radenti e con un sistema a fotocellule se ne determina la velocità che vale $v = 0,45$ m/s. Dedurre il lavoro L_a compiuto dalle forze di attrito del piano contro il moto del corpo.

Per quanto detto, la presenza degli attriti rende il sistema non isolato, per cui non potremmo certo dire che vale il PCEM. Per accorgercene, proviamo ad effettuare un bilancio energetico:

1. Fase 1: il corpo è in quiete sulla sommità del piano inclinato ad altezza $h = 22$cm. La sua energia è puramente potenziale e vale $E_1 = mgh = 0,65J$

2. Fase 2: il corpo ha completato la discesa, ha acquisito una certa velocità v che viene mantenuta costante per tutta la durata del moto orizzontale, visto che non vi sono attriti (almeno radenti) significativi. La sua energia è puramente cinetica e vale $E_2 = \frac{1}{2}mv^2 = 0,03J$

E' evidente che $E_1 \neq E_2$, in particolare $E_2 < E_1$, dunque, nella transizione tra la fase 1 e la fase 2 dell'energia è stata dissipata, nella fattispecie dalle forze di attrito radente del vincolo inclinato.

Il lavoro di queste forze è pari a:

$$L_a = \Delta E = 0,03J - 0,65J = -0,62J$$

E' ovviamente un lavoro resistente, perchè è negativo, e non poteva essere altrimenti, trattandosi di forze di attrito.

Si tratta di un'energia perduta molto grande, pari al 95% del "capitale" iniziale di energia potenziale!

4.2 entità delle forze di attrito

In questo esempio possiamo calcolare l'entità delle forze di attrito che usualmente agiscono in dispositivi di sicurezza.

L'ascensore che precipita: un ascensore vuoto di massa $m = 500Kg$ precipita da un'altezza di $40m$, muovendosi all'interno di un sistema di guide laterali frenanti. Al termine della corsa è presente un pistone a molla di costante complessiva $K = 1000\ N/m$. Quando l'ascensore giunge a quota zero si osserva che la molla si comprime di $\Delta s = 1,5m$. Dedurre l'entità delle forze di attrito frenanti che si sviluppano sulle guide laterali

Il lavoro delle forze di attrito è dato dalla differenza ΔE fra le energie meccaniche E_1 ed E_2 delle due fasi (fase iniziale, quando l'ascensore inizia la caduta, e fase finale, quando si ha la compressione della molla).

Nella fase iniziale, l'energia è potenziale gravitazionale e vale:

$$E_1 = m \cdot g \cdot h = 196.200J$$

Nella fase finale, la compressione della molla indica una energia potenziale elastica residua di

$$E_2 = \frac{1}{2}K\Delta s^2 = 1125J$$

Il sistema non è conservativo, visto che $E_2 < E_1$. La differenza di energia ci dà il lavoro L delle forze di attrito:

$$L = \Delta E = E_2 - E_1 = -195.075J$$

Se lo spostamento s è stato di $h = 40m$, la forza sarà data da:

$$F = \frac{L}{s} = \frac{-57735}{40} = -4876,9N$$