Esercizi di Cinematica

9 settembre 2009

Capitolo 1

Moti in una dimensione

1.1 Problemi svolti

1. **velocità media**

   Un'automobile viaggia per un certo tempo T alla velocità di 40 km/h e poi per lo stesso tempo alla velocità di 80 km/h. Trovare la velocità media.

   soluzione

   L'automobile percorre la distanza $\Delta s = v_1 T + v_2 T$ nel tempo complessivo $\Delta t = 2T$; pertanto, la velocità media si ottiene come:

   $$v_m = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{v_1 T + v_2 T}{2T} = \frac{v_1 + v_2}{2} = 60 \text{ km/h} \equiv 16.67 \text{ m/s}\,.$$

2. **velocità media-2**

   Un'automobile viaggia per un certo tempo T alla velocità di 40 km/h, percorrendo una distanza d. Essa, quindi, percorre una distanza identica alla velocità di 80 km/h. Trovare la velocità media.

   soluzione

   Lo spazio complessivamente percorso è $\Delta s = 2d$; mentre i due tratti sono percorsi, rispettivamente, nei tempi $\Delta t_1 = d/v_1$ e $\Delta t_2 = d/v_2$. Pertanto il tempo complessivamente trascorso è $\Delta t = d/v_1 + d/v_2$. Dunque:

   $$v_m = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{2d}{\frac{d}{v_1} + \frac{d}{v_2}} = 2\frac{v_1 v_2}{v_1 + v_2} \simeq 53.3 \text{ km/h} \equiv 14.8 \text{ m/s}\,.$$

   Si noti che in questo caso, la velocità media **non coincide** con la media delle velocità.

3. **contro corrente**

   Una barca naviga controcorrente lungo un fiume, da un approdo (punto A) ad un secondo approdo (punto B) alla velocità costante $v_1 = 10$ km/h rispetto alla riva. Successivamente torna indietro (dal punto B al punto A) alla velocità $v_2 = 16$ km/h rispetto alla riva. Sapendo che il motore della barca ha lavorato sempre al massimo della potenza in entrambi i percorsi, trovare la velocità della corrente e la velocità della barca rispetto alla corrente.

   soluzione

   Chiamiamo v_b la velocità della barca rispetto all'acqua (che è la stessa per entrambi i tratti percorsi) e v_c la velocità della corrente (cioè, la velocità dell'acqua rispetto alla riva). Nel primo tratto, la corrente si oppone al moto della barca; nel secondo tratto, invece, la trascina. Dunque possiamo legare le velocità rispetto alla riva a v_b e v_c come segue:

   $$v_1 = v_b - v_c\,, \qquad v_2 = v_b + v_c\,.$$

   Ricavando le due incognite, si ha

   $$v_b = \frac{v_1 + v_2}{2} = 13 \text{ km/h}\,, \qquad v_c = \frac{v_2 - v_1}{2} = 3 \text{ km/h}\,.$$

4. **contro corrente-2**

Nella stessa situazione del problema precedente, sono note la velocità della corrente $v_c = 2$ km/h e la velocità della barca rispetto alla corrente $v_b = 10$ km/h. Calcolare la velocità media della barca rispetto alla riva.

soluzione

Detta d la distanza tra i punti A e B, si ha che la distanza complessiva percorsa è $\Delta s = 2d$, mentre il tempo impiegato vale $\Delta t = \Delta t_1 + \Delta t_2$, con $\Delta t_1 = d/(v_b - v_c)$ e $\Delta t_2 = d/(v_b + v_c)$. Pertanto:

$$v_m = \frac{2d}{\frac{d}{v_b - v_c} + \frac{d}{v_b + v_c}} = \frac{v_b^2 - v_c^2}{v_b} = 9.6 \text{ km/h}\,.$$

5. **in frenata**

Un'automobile, durante una frenata uniforme, passa in un minuto dalla velocità di 40 km/h a quella di 28 km/h. Trovare il valore dell'accelerazione e lo spazio percorso.

soluzione

Cominciamo col convertire i valori di velocità: $v_1 = 40 \text{ km/h} \equiv 11.11 \text{ m/s}$, $v_2 = 28 \text{ km/h} \equiv 7.78 \text{ m/s}$.
Dato che la frenata è uniforme e che avviene in $\Delta t = 60$ s, l'accelerazione si può ricavare come

$$a = \frac{v_2 - v_1}{\Delta t} = -0.055 \text{ m/s}^2\,.$$

Lo spazio percorso in Δt, si ottiene come

$$s = \frac{1}{2}\, a\, \Delta t^2 + v_1\, \Delta t = 566.6 \text{ m}\,.$$

Si noti che nella valutazione di Δs, il termine proporzionale all'accelerazione fornisce un contributo negativo.

6. **treno in transito**

Un treno si muove tra due stazioni, distanti $d = 1.5$ km. Esso percorre la prima metà del tragitto con moto uniformemente accelerato e la seconda metà con moto uniformemente ritardato. Data la velocità massima ($v_{max} = 50$ km/h), calcolare il valore dellaccelerazione e il tempo totale di percorrenza.

soluzione

Dato il tipo di moto, le due metà del tragitto sono percorse nello stesso tempo $T/2$. Per ottenere tempo e accelerazione, basta mettere a sistema le due relazioni che descrivono la prima metà del percorso:

$$\frac{d}{2} = \frac{1}{2}\, a \left(\frac{T}{2}\right)^2, \qquad v_{max} = a\,\frac{T}{2}\,.$$

Risolvendo il sistema, si ricava

$$a = \frac{v_{max}^2}{d} = 0.128 \text{ m/s}^2\,, \qquad T = 2\frac{v_{max}}{a} = 217 \text{ s}\,.$$

Si noti che è essenziale convertire il valore di v_{max} in metri al secondo: $v_{max} = 13.88$ m/s.

7. **100 metri**

In una gara sulla distanza $d = 100$ m, due atleti impiegano lo stesso tempo di $T = 10.2$ s. Il primo impiega $t_1 = 2$ s in accelerazione costante, poi mantiene la velocità costante fino alla fine; mentre il secondo accelera per $t_2 = 3$ s, poi mantiene la velocità costante. Determinare per ciascun concorrente laccelerazione e la velocità massima.

soluzione

Per ciascuno dei due atleti, occorre considerare che lo spostamento complessivo d viene compiuto in due tratti di cui il primo (di durata $t_i,\ i = 1, 2$) è uniformemente accelerato, mentre il secondo (di durata $T - t_i$) è di moto uniforme alla velocità $v_{max,i} = a_i\, t_i$.

(a) primo atleta:

$$d = \frac{1}{2}\, a_1\, t_1^2 + a_1\, t_1\, (T - t_1) \qquad \Rightarrow \qquad a_1 = 5.43 \text{ m/s}^2\,,$$

(b) secondo atleta

$$d = \frac{1}{2}\, a_2\, t_2^2 + a_2\, t_2\, (T - t_2) \qquad \Rightarrow \qquad a_1 = 3.83 \text{ m/s}^2\,.$$

Le velocità massime sono

$$v_{max,1} = a_1\, t_1 = 10.86 \text{ m/s}\,, \qquad v_{max,2} = a_2\, t_2 = 11.5 \text{ m/s}\,.$$

8. **100 metri-2**

Nella stessa gara del problema precedente, quale concorrente si trova in testa dopo che è trascorso il tempo $t^* = 6$ s dalla partenza?

soluzione

Poichè entrambi i concorrenti hanno si trovano già nella fase di moto uniforme, le distanze percorse da ciascuno di essi fino al tempo t^* valgono

$$\Delta s_1 = \frac{1}{2}\, a_1\, t_1^2 + v_{max,1}\, (t^* - t_1) = 54.3 \text{ m}\,,$$

$$\Delta s_2 = \frac{1}{2}\, a_2\, t_2^2 + v_{max,2}\, (t^* - t_2) = 51.7 \text{ m}\,.$$

Dunque, il primo concorrente è in testa di 2.6 m.

9. **frenata**

Unautomobile viaggia alla velocità $v_{iniziale} = 120$ Km/h. Visto un ostacolo, il conducente riesce a fermarsi in $d = 110$ m. Qual è l'accelerazione e quanto tempo impiega ?

soluzione

Valgono le relazioni

$$d = 110m = \frac{1}{2} a t^2 + v_{iniziale} t\,, \qquad v_{finale} = 0 = a t + v_{iniziale}\,,$$

dove $v_{iniziale} = 33.3$ m/s. Da queste due equazioni si ricava

$$a = \frac{v_{iniziale}^2}{2d} \simeq 5 \text{ m/s}^2\,, \qquad t = \frac{v_{iniziale}}{a} \simeq 6.6 \text{ s}\,.$$

10. **lancio in aria**

Una palla viene lanciata da terra verso l'alto con velocità iniziale $v_0 = 12$ m/s.

(a) Quanto tempo impiega a raggiungere il punto più alto della traiettoria ?
(b) Quanto vale la distanza da terra del punto pi alto ?
(c) Dopo quanto tempo dal lancio ricade a terra ?
(d) Con che velocità la palla tocca terra ?

soluzione

(a) $v(t) = v_0 - g\, t \quad \Rightarrow \quad t_{max} = \frac{v_0}{g} = 1.24$ s;
(b) $d = v_0 t_{max} - \frac{1}{2} g\, t_{max}^2 = 7.3$ m;
(c) $t_{terra} = 2 t_{max} = 2.48$ s;
(d) $v_{terra} = -v_0 = -12$ m/s.

11. **un sasso dal tetto**

Un uomo lancia un sasso dal tetto di un palazzo verso l'alto, con velocità $v_0 = 12.25$ m/s. Il sasso raggiunge il suolo dopo un tempo $T = 4.25$ s. Si calcoli :

(a) l'altezza del palazzo;

(b) la massima altezza raggiunta dal sasso;

(c) la velocità con cui il sasso tocca il suolo.

soluzione

(a) La coordinata verticale del sasso a partire dall'istante del lancio vale $y(t) = h + v_0\,t - \frac{1}{2}\,g\,t^2$, da cui, ponendo $y = 0$ per $t = T$, si trova $h = \frac{1}{2}gT^2 - v_0T = 36.4$ m;

(b) la velocità del sasso vale $v(t) = v_0 - gt$ da cui, ponendo $v(t_{max}) = 0$, si ottiene $t_{max} = \frac{v_0}{g}$ e quindi $y_{max} \equiv y(t = t_{max}) = h + v_0 t_{max} - \frac{1}{2}\,g\,t_{max}^2 = 44.1$ m.

(c) $v_{suolo} \equiv v(t = T) = v_0 - gT = -29.4$ m/s.

12. **una barca in un fiume**

Una barca naviga in un fiume, che ha una corrente con velocità $v_c = 1$ m/s. Il suo motore è in grado di produrre una velocità di $v_{barca} = 2$ m/s rispetto alla corrente. Trovare la velocità della barca rispetto alla riva in tre casi :

(a) barca in favore di corrente;

(b) barca contro corrente;

(c) barca che naviga perpendicolarmente alla corrente.

soluzione

(a) $v_{favore} = v_b + v_c = 3$ m/s;

(b) $v_{contro} = v_b - v_c = 1$ m/s;

(c) $v_\perp = \sqrt{v_b^2 + v_c^2} \simeq 2.23$ m/s.

13. **una barca in un fiume-2**

Una barca a motore si dirige a velocità $v_b = 7.2$ Km/h, in direzione perpendicolare alla riva di un fiume largo $L = 500$ m. A causa della corrente essa approda più a valle ad una distanza di $d = 375$ m dal punto di partenza. Trovare la velocità della corrente e il tempo totale di attraversamento del fiume (si consideri un fiume senza anse nè curve e con sponde parallelle). A metà dell'attraversamento, un piccolo razzo di segnalazione viene sparato per errore con velocità $v_r = 20$ m/s da una pistola posta nella barca e orientata verso l'alto. Dire a quale distanza il razzo ricade in acqua rispetto al punto in cui avviene lo sparo. (si consideri $g = 10$ m/s^2)

soluzione

Nella direzione perpendicolare al fiume si ha $L = v_b t$, da cui $t = L/v_b = 250$ s. In questo intervallo di tempo, la distanza percorsa lungo le sponde vale $d = v_c t$, da cui si ottiene la velocità della corrente $v_c = d/t = 1.5$ m/s. Il razzo parte, dunque, con una componente orizzontale della velocità pari a

$$v_{r,orizz} = \sqrt{v_b^2 + v_c^2} = 2.5 \text{ m/s} .$$

Esso rimane in aria per un tempo pari a $t_{volo} = 2v_r/g = 4$ s e pertanto rientra in acqua a distanza

$$D_r = t_{volo}\, v_{r,orizz} = 10 \text{ m} .$$

14. **caduta da una torre (un problema in due dimensioni)**

Un oggetto viene lanciato da una torre di altezza $H = 25$ m, in direzione orizzontale, con velocità $v_0 = 15$ m/s. A che distanza cade, rispetto al bordo della torre ? In quanto tempo ?

soluzione

Rispetto ad un riferimento con origine alla base della torre, la posizione dell'oggetto è data dalle coordinate

$$\underline{\text{orizzontale}}: \; x(t) = v_0\, t\,, \qquad \underline{\text{verticale}}: \; y(t) = h - \frac{1}{2}\, g\, t^2\,.$$

Pertanto esso tocca il suolo (cioè, si ha $y = 0$) quando

$$0 = h - \frac{1}{2}\, g\, t_{suolo}^2 \qquad \Rightarrow \qquad t_{suolo} = \sqrt{\frac{2h}{g}} \simeq 2.26 \text{ s}\,,$$

atterrando alla distanza $x(t = t_{suolo}) = v_0 t_{suolo} \simeq 33.9$ m.

1.2 Problemi da svolgere

1.2.1 Moto rettilineo uniforme

1. **velocità media**

Un corpo si muove su una retta con velocità costante $v_1 = 10\,\text{m/s}$ per $10\,\text{s}$, quindi con velocità $v_2 = 5\,\text{m/s}$ per altri $5\,\text{s}$. Qual è la sua velocità media?

2. **incontro tra talpe**

Due talpe scavano una galleria partendo da due punti distanti $d = 20\,\text{m}$ e muovendosi l'una incontro all'altra. Sapendo che entrambe si muovono con la velocità costante $v = 1\,\text{m/s}$, calcolare dopo quanto tempo si incontrano.

3. **un aereo in ritardo**

Un aeroplano mantiene per un'ora la velocità di $280\,\text{km/h}$, e poi, per un'ulteriore mezz'ora, la velocità di $340\,\text{km/h}$. Quanto spazio percorre? Qual è la sua velocità media?

4. **due pedoni**

Due pedoni sono fermi al semaforo ai lati opposti di una strada larga $12\,\text{m}$, in attesa di attraversarla. Quando scatta il verde, il primo si muove con velocità $v_1 = 1{,}8\,\text{m/s}$, l'altro con con velocità $v_2 = 1{,}2\,\text{m/s}$. Dopo quanto tempo si incontrano e a quali distanze dai bordi della strada?

1.2.2 Moto uniformemente accelerato

1. **un colpo di fucile**

Un colpo di fucile viene sparato verticalmente verso l'alto con velocità iniziale $v_0 = 250\,\text{m/s}$. In quanto tempo il proiettile raggiunge l'altezza $h = 1000\,\text{m}$?

2. **in un tubo catodico**

Un elettrone in un tubo catodico di un televisore viene accelerato da fermo per un tratto lungo $l = 3\times10^{-2}m$, acquistando la velocità di $v = 3 \times 10^6\,\text{m/s}$. Calcolare la sua accelerazione.

3. **un'auto che accelera**

Una macchina parte da ferma con accelerazione costante pari a $2\,\text{m/s}^2$, accelerando per cinque secondi. Nei successivi $10s$, essa si muove di moto uniforme. Quanto spazio percorre? Qual è la sua velocità media?

4. **caduta**

Un corpo cade da fermo. Calcolare lo spazio che esso percorre tra il settimo e l'ottavo secondo dall'inizio della caduta.

5. **tra due semafori**

   Su una strada rettilinea ci sono due semafori posti a distanza $d = 450\,\mathrm{m}$ l'uno dall'altro, in cui il verde scatta nello stesso istante e si mantiene acceso per $\Delta t = 30\,\mathrm{s}$. Un automobilista si trova, fermo, al primo di essi e parte con accelerazione costante al momento in cui si accende la luce verde. Quanto vale l'accelerazione minima che gli permette di passare dal secondo semaforo quando esso ha ancora la luce verde?

6. **moto accelerato**

   Un corpo si muove con accelerazione costante. La sua velocità iniziale è $v_0 = 20\,\mathrm{m/s}$ e raddoppia dopo che il corpo ha percorso $100m$. Calcolare l'accelerazione.

7. **due sassi**

   Due sassi vengono lanciati da terra verso l'alto a distanza di $1s$ l'uno dall'altro, con velocità iniziali uguali, pari a $25\,\mathrm{m/s}$. A che quota si incontrano?

8. **tra due cavalcavia**

   Un'automobile transita sotto un cavalcavia autostradale alla velocità di $120\,\mathrm{km/h}$. Dopo aver percorso $250\,\mathrm{m}$, l'auto passa sotto un secondo cavalcavia alla velocità di $130\,\mathrm{km/h}$. Se il moto si è svolto con accelerazione costante, quanto tempo è trascorso tra i due passaggi?

9. **un altro moto accelerato**

   In un intervallo di $3\,\mathrm{s}$, un corpo che si muove di moto uniformemente accelerato dopo essere partito da fermo, percorre $8\,\mathrm{m}$. Quale spazio percorrerà nei successivi $3\,\mathrm{s}$?

10. **sorpassi**

    Un'automobile parte da ferma da un semaforo nel momento in cui si accende la luce verde, muovendosi con accelerazione costante $a = 3 \times 10^3\,\mathrm{m/s^2}$. Una seconda auto, che si muove alla velocità costante di $60\,\mathrm{km/h}$, sorpassa la prima nell'istante in cui essa parte. Dopo quanto tempo le due auto si incontrano di nuovo?