# Dinamica dei fluidi

- Legge di Simon Stevin
- Spinta di Archimide
- Portata di un fluido
- Teorema di Bernoulli
- Teorema di Torricelli

Antonio Pierro

Per consigli, suggerimenti, eventuali errori o altro potete scrivere una email a antonio.pierro[at]gmail.com

# Fluido

- Si definisce fluido una sostanza (liquida o gassosa) che assume la forma del recipiente che la contiene.
- Differenze tra liquidi e gas:
  - la densità dei liquidi è molto maggiore di quella dei gas.

$$\rho_{H_2O} = 10^3 \ \frac{kg}{m^3}\ , \qquad \rho_{aria} = 1.3 \ \frac{kg}{m^3}$$

  - I liquidi sono incomprimibili, mentre un gas risulta comprimibile con facilità.

# Pressione

- Si definisce pressione in un punto del fluido il rapporto tra la forza agente su una superficie infinitesima che circonda il punto e l'area della superficie stessa:

$$P = \frac{dF}{dS} \qquad (\frac{N}{m^2}, Pascal)$$

- Se S è una superficie finita nella quale la pressione è costante:

$$P = \frac{F}{S}$$

# Legge di Stevin

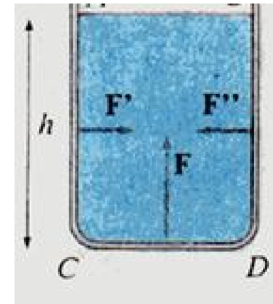
- Preso un asse z orientato verso il basso, la pressione all'interno del fluido varia con la coordinata z seconda la legge:

$$p(z) = p_0 + \rho g h$$

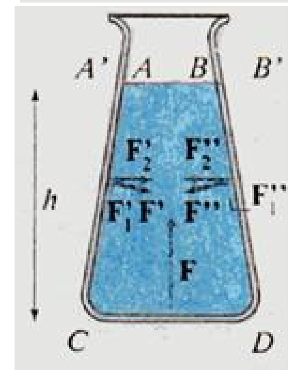
- La legge di Stevin può essere ottenuta molto semplicemente calcolando il peso della colonna di liquido alta z:

$$m * g = \rho * V * g = \rho * S * z * g$$

$$\Rightarrow p = \frac{F}{S} = \rho * g * z$$



(a)



(c)

# Principio di Pascal

- Il principio di Pascal afferma che ogni cambiamento della pressione esterna dà luogo a un'eguale variazione di pressione nel fluido:

$$p = p_0 + \Delta p$$

- Attenzione: in un piccolo volume di gas, $\Delta p$ è molto minore di $p_0$ e quindi, con buona approssimazione, la pressione nel gas è ovunque costante e pari al valore della pressione esterna $p_0$.

# Vasi comunicanti

- Consideriamo un sistema di recipienti in comunicazione tra loro, riempiti dello stesso liquido e aperti nello stesso ambiente.
- Il liquido nei vari recipienti assume lo stesso livello rispetto al suolo.
- Questo risultato esprime il principio dei vasi comunicanti.

# Manometro 1/2

- Il manometro è uno strumento di misura della pressione dei fluidi costituito da un tubo a forma di U.
- Se i due rami comunicano con ambienti a diverse pressioni si produce un dislivello tra le due superficie libere dato da:

$$h = \frac{p_1 - p_2}{\rho g} \,,$$

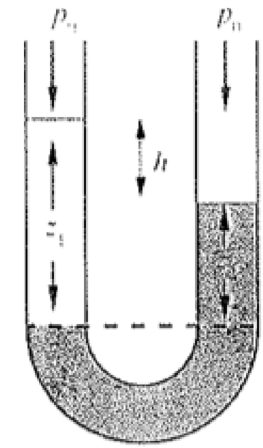
in accordo con la legge di Stevin.

# Manometro 2/2

Se il tubo a U contiene due liquidi diversi non miscibili di densità $\rho_1$ e $\rho_2$ e le superficie libere sono a contatto con lo stesso ambiente (la linea tratteggiata è equipotenziale):

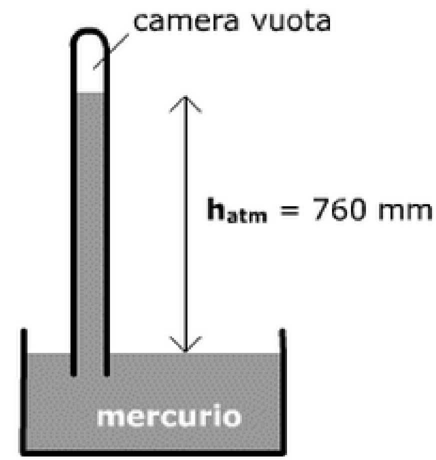
$$\rho_1 * g * z_1 = \rho_2 * g * z_1 \Rightarrow$$

$$\frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{z_2}{z_1} = 1 - \frac{h}{z_1}$$



# Barometro di Torricelli

- Considero il manometro a U con un ramo chiuso e un ramo aperto in un ambiente a pressione atmosferica.
- Se il riempimento con mercurio è effettuato opportunamente, senza fare entrare aria nella parte chiusa, si osserva che il dislivello h tra le due superfici libere è di circa 76 cm.

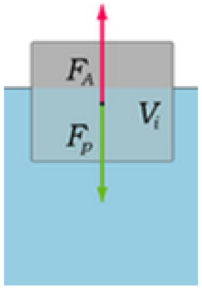



- Poichè nel ramo chiuso c'è il vuoto, il dislivello è dovuto solo alla pressione atmosferica che vale dunque

$$\rho * g * h, \quad \rho_{Hg} = 13.59 \,\frac{g}{cm^3} \Rightarrow 1.013 * 10^5 Pa$$

# Spinta di Archimede

- Un corpo immerso in un fluido riceve una spinta verso l'alto che è uguale e contraria alla forza peso della massa di fluido spostata.
- Tale forza si chiama spinta di Archimede ed è applicata nel centro di massa del volume di fluido che era al posto del corpo.

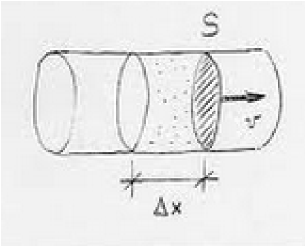


# Flusso di un campo vettoriale

- In Matematica, il flusso di un campo vettoriale $\vec{V}$ attraverso una superficie orientata S è definito come l'integrale di superficie del prodotto scalare del campo vettoriale $\vec{V}$ con il versore normale della superficie, esteso su tutta la superficie stessa.

$$\Phi = \int_S \vec{V} d\vec{S} = \int_S \vec{V} \vec{n} dS$$

# Portata di un fluido




- Per un fluido in moto dentro un condotto, la portata Q è il volume di fluido che passa attraverso una sezione S del condotto nell'unità di tempo.
- Se $\vec{v}(x, y, z)$ è il campo delle velocità nella sezione S, e $\vec{n}$ è il versore perpendicolare alla superficie, si dimostra che la portata è uguale al flusso del campo delle velocità integrato sulla superficie S:

$$Q = \int_S \vec{v}(x, y, z) * \vec{n} \Rightarrow$$

$$\text{(se v è costante) } |Q| = S * v * \cos(\theta)$$

# Fluido ideale

- Si definisce viscosità una grandezza fisica che quantifica la resistenza dei fluidi allo scorrimento.
- Si definisce fluido ideale un fluido incomprimibile e con viscosità nulla.
- Nei liquidi la viscosità decresce all'aumentare della temperatura, nei gas invece cresce, considerando il volume invariato.

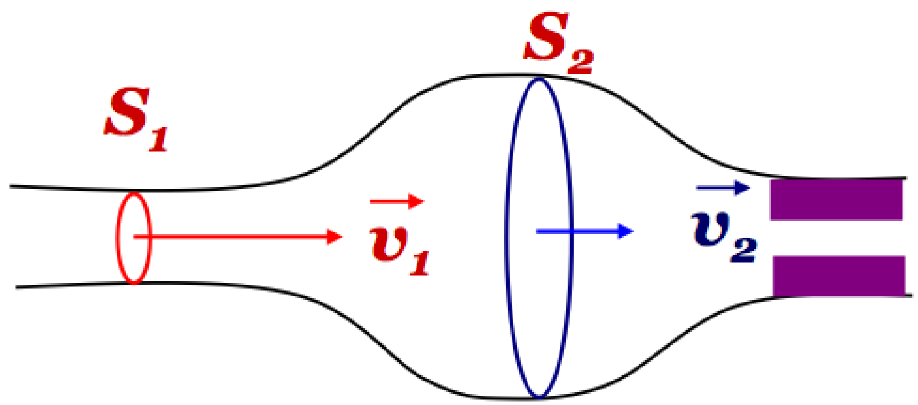
# Teorema di Bernulli

- Quando un fluido ideale si muove in *regime stazionario* (le molecole del fluido si muovono con la stessa velocità in qualsiasi punto della sezione) lungo un condotto, vale il teorema di Bernulli:

$$p + \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho g h = costante$$

- In ogni sezione del condotto la somma della pressione, dell'energia cinetica per unità di volume e dell'energia potenziale per unità di volume è costante.

# Esempio: aneurisma




- Un aneurisma è una dilatazione progressiva di un segmento vascolare.

$$v_2 < v_1 \Rightarrow p_2 > p_1$$

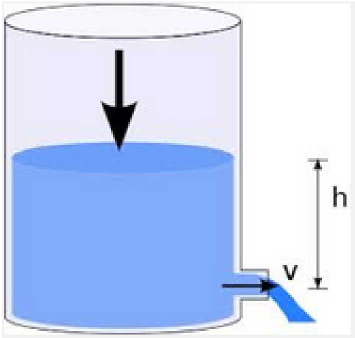
$$p_1 - p_2 = \frac{1}{2}\rho(v_2^2 - v_1^2), \qquad v_2 = \frac{S_1}{S_2} v_1$$

# Teorema di Torricelli

- Se in un recipiente di sezione S, pieno di liquido, viene praticato un foro di sezione molto minore di S a una profondità h rispetto alla superficie libera del liquido, la velocità con cui il liquido esce dal foro è:

$$v = \sqrt{2gh}$$

# Teorema di Torricelli, dimostrazione




- Sulla superficie libera $p = p_0$ e v = 0 e, assumendo il livello del foro come punto di riferimento, z = h
- All'uscita del foro $p = p_0$ e z = 0. Pertanto:

$$p_0 + \rho * g * h = p_0 + \frac{1}{2}\rho v^2 \Rightarrow v = \sqrt{2gh}$$