Meccanica del punto materiale

- Princìpi della dinamica.
- Forze.
- Momento angolare.

Antonio Pierro **@antonio_pierro_ (https://twitter.com/antonio_pierro_)**

Per consigli, suggerimenti, eventuali errori o altro potete scrivere una email a antonio.pierro[at]gmail.com

Typesetting math: 100%

Primo principio della dinamica

- Un corpo non soggetto a forze permane nel suo stato di quiete o di moto rettilineo uniforme.
- La proprietà dei corpi di mantenere il loro stato di quiete o di moto rettilineo uniforme è chiamata inerzia.
- Un sistema di riferimento inerziale è un sistema di riferimento in cui è valido il primo principio della dinamica.

Seconda legge della dinamica

- Si osserva che l'accelerazione impressa a un corpo di massa nota m è inversamente proporzionale alla sua massa e direttamente proporzionale all'intensità dell'azione a cui viene sottoposto:

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}$$

- La legge di Newton contiene, come caso particolare, il primo principio della dinamica.
- Tale legge è verificata solo nei sistemi di riferimento inerziali (altrimenti compaiono altri termini correttivi, le forze apparenti).

Terza legge della dinamica

- Quando due corpi interagiscono,
  la forza $\vec{F}_{i->j}$, che il primo corpo (i) esercita sul secondo corpo (j)
  è uguale e opposta alla
  forza $\vec{F}_{j->i}$ che il secoondo corpo (j) esercita sul primo corpo (i)

Quantità di moto

- Si definisce quantità di moto di un punto materiale che si muove con velocità $\vec{v}$:

$$\vec{p} = m * \vec{v}$$

- Se la massa è costante:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

Teorema dell'impulso

- Dalla relazione precedente si osserva che l'azione di una forza durante un intervallo di tempo **dt** provoca una variazione infinitesima della quantità di moto:

$$\vec{F} * dt = d\vec{p}$$

- In termini finiti (integrando) si ha:

$$\vec{J} = \int_0^t \vec{F} * dt = \int_{p_0}^{p} d\vec{p} = \vec{p} - \vec{p}_0 = \Delta\vec{p}$$

- Il termine vettoriale $\vec{J}$ è chiamato **impulso della forza** ed esprime il teorema dell'impulso:
  l'impulso di una forza applicata ad un punto materiale provoca la variazione della sua quantità di moto.

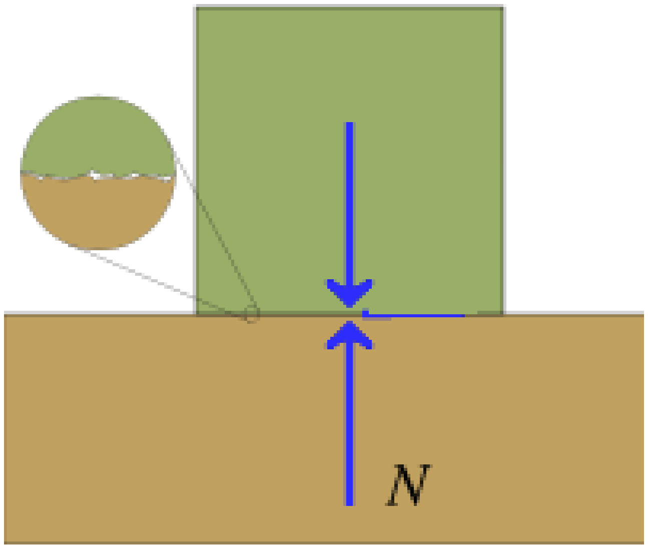
Risultante delle forze

- Per convenzione, si indica con il simbolo $\vec{R}$ la risultante (somma) delle forza applicate su un punto materiale.
- Affermare che la forza agente su un punto è nulla, spesso indica che la somma delle forze agenti su di esso, cioè la risultante, è nulla:

$$\vec{R} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \ldots + \vec{F}_n = 0$$

Reazioni vincolari

- Se un corpo soggetto all'azione di una forza rimane fermo, dobbiamo dedurre la presenza di una forza uguale e contraria applicata al corpo in modo tale che esso rimanga in quiete.
- Questa forza sarà chiamata reazione vincolare e sarà indicata con il seguente simbolo $\vec{N}$



Forza peso

- In prossimità della superficie terrestre tutti i corpi assumono - se lasciati liberi - la stessa accelerazione (detta di gravità) diretta lungo la verticale e il cui modulo in media è:

$$\vec{g} = 9,8\ \frac{m}{s^2}$$

- Dalla seconda legge di Newton risulta:

$$\vec{P} = m * \vec{g}$$

- In assenza di altre forze il moto del corpo sarà uniformemente accelerato.

Forza di attrito radente

- Supponiamo di applicare una forza orizzontale su un corpo poggiato su un piano: si osserva che il corpo non entra in movimento finché la forza non supera un valore pari a:

$$\vec{F}_{as} = \mu_s * \vec{N} \qquad \text{(forza di attrito statico)}$$

- Quando il corpo entra in movimento si osserva una forza costante che si oppone al moto pari a:

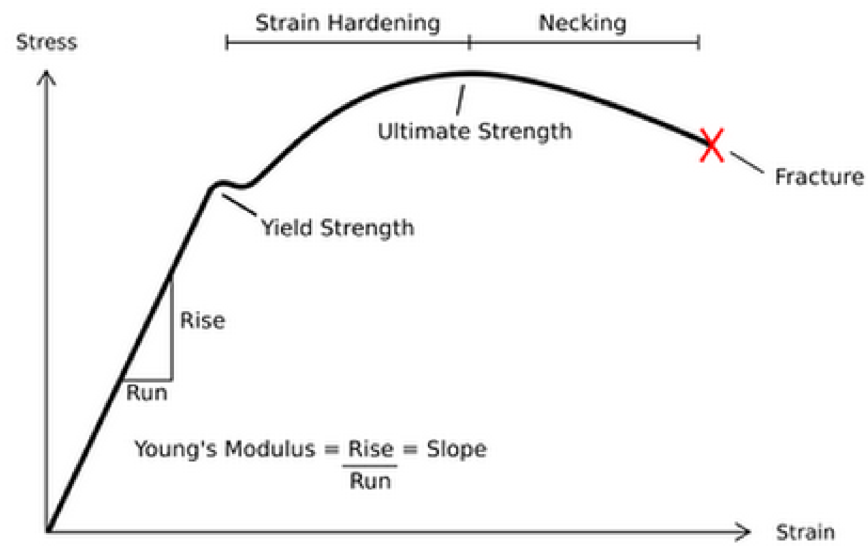
$$\vec{F}_{ad} = \mu_d * \vec{N} \qquad \text{(forza di attrito dinamico)}$$

- Si verifica che la forza di attrito radente statico è sempre maggiore della forza di attrito radente dinamico, cioè:

$$\mu_s > \mu_d$$

Legge di Hooke

- Robert Hooke, 1675, *Ut tensio sic vis* (Come l'estensione, così la forza).
- L'allungamento subìto da un corpo elastico è direttamente proporzionale alla forza ad esso applicata.



- La costante di proporzionalità viene detta costante elastica e dipende dalla natura del materiale stesso.

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon}, \quad \sigma: \text{ sforzo}, \quad \epsilon = \frac{\Delta l}{l}: \text{ deformazione}$$

Forza elastica

- Si definisce forza elastica una forza di:
  - direzione costante
  - verso rivolto sempre ad un punto O
  - Modulo direttamente proporzionale alla distanza da O

$$\vec{F} = -k * x * \vec{i}$$

  - Si dimostra che il moto di un punto soggetto ad una forza elastica è un moto armonico semplice:

$$x = A\cos(\omega * t + \phi)$$

    con pulsazione:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Legge oraria di un corpo soggetto alla forza elastica

- Per trovare la legge oraria basta risolvere questa equazione differenziale:

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} = -\frac{k}{m}x(t) = -\omega^2 x(t), \qquad \text{con } \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

- Si dimostra che l'equazione:

$$x = A\cos(\omega * t + \phi)$$

è soluzione dell'equazione differenziale $\frac{d^2x(t)}{dt^2} = -\omega^2 x(t)$.

Forza di attrito viscoso

- La forza di attrito viscoso è una forza che si oppone al moto ed è proporzionale alla velocità del corpo soggetto a tale forza:

$$\vec{F}_v = -b\vec{v}$$

- Esempio: corpo che viene lasciato cadere in un fluido. Si dimostra che la sua velocità in funzione del tempo vale:

$$v(t) = \frac{m * g}{b} * (1 - e^{\frac{-b*t}{m}})$$

Forza centripeta

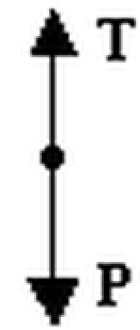
- La risultante delle forze che agiscono su un punto materiale che si muove lungo una circonferenza può essere scomposta in due:
  1. **Forza tangente**: responsabile della variazione del modulo della velocità tangente.
  2. **Forza centripeta**: responsabile della variazione di direzione della velocità tangente.

$$F_c = m * \frac{v^2}{R}$$

- Se la forza tangente è nulla si ha il moto circolare uniforme

Tensione

- La tensione è la forza di trazione esercitata da una corda, un cavo, una catena, o un analogo oggetto solido su un altro oggetto.
- Si osserva in figura che la forza peso della sfera viene bilanciata dalla tensione del filo.
- Un filo può esercitare solo forze che hanno la direzione del filo stesso, cioè non può sopportare una sollecitazione ortogonale.



Pendolo semplice

- Il **pendolo semplice** è costituito da un punto materiale P appeso tramite un filo inestensibile di lunghezza L e di massa trascurabile.
- Le forze agenti sul punto P sono il peso $\vec{P}$ e la tensione del filo $\vec{T}$, quindi la seconda legge della dinamica sarà:

$$\vec{R} = \vec{P} + \vec{T} = m * \vec{a}$$

- Si dimostra che per piccole oscillazioni il periodo di una oscillazione completa vale:

$$T = 2 * \pi * \sqrt{\frac{L}{g}}$$

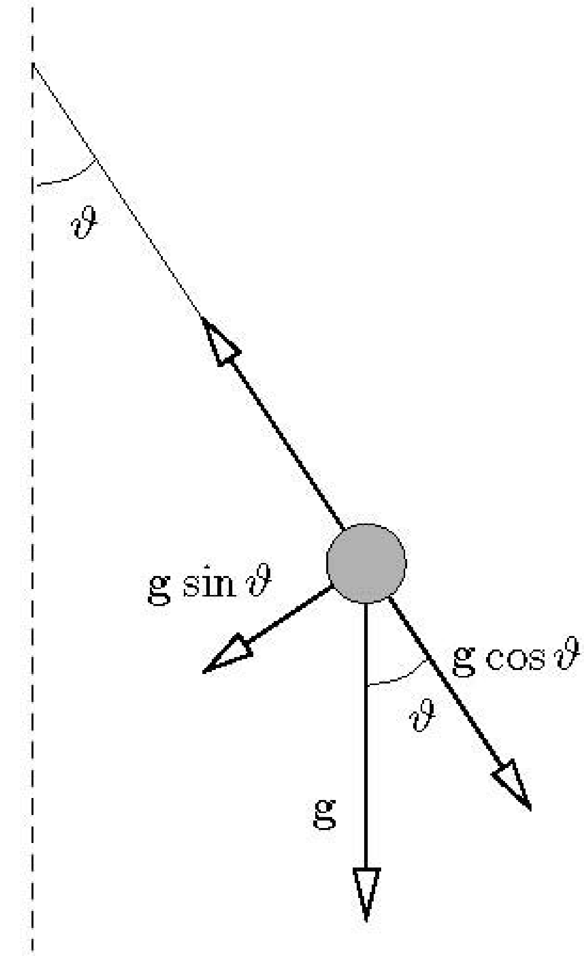
Pendolo semplice: ricaviamo T (1/3)

- Il punto materiale P a causa del filo inestensibile, si potrà solo muovere lungo l'arco di cerchio centrato nel punto di sospensione.
- Il punto materiale è soggetto a due accelerazioni, una tangenziale (perpendicolare al filo) e una centripeta (diretta lungo il filo)
- Proiettando ora la seconda legge di Newton lungo l'asse x otteniamo:

$$R = -P * \sin\theta = m * a$$

da cui segue:

$$-g * \sin\theta = a$$



Pendolo semplice: ricaviamo T (2/3)

- Introducendo l'accelerazione angolare:

$$\alpha = \frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{a}{L}$$

otteniamo:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{L} * \sin\theta$$

Pendolo semplice: ricaviamo T (3/3)

- Si può dimostrare che se calcoliamo il seno di un angolo molto piccolo (espresso in radianti) vale la proprietà:

$$\sin\theta \approx \theta \Rightarrow \frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{L} * \theta$$

equazione molto simile a quella che abbiamo ottenuto nel moto armonico

- Come nel moto armonico possiamo porre:

$$\omega^2 = \frac{g}{L}$$

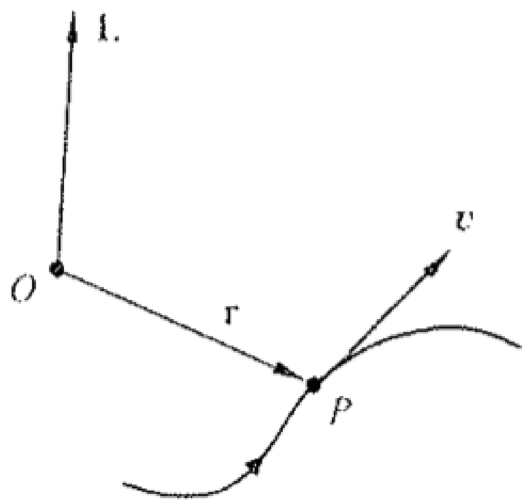
e sapendo che:

$$\omega = \frac{2 * \pi}{T} \Rightarrow T = 2 * \pi * \sqrt{\frac{L}{g}}$$

Momento angolare

- Si definisce come momento angolare il momento del vettore quantità di moto:

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times m * \vec{v}$$



- Il punto O è il polo rispetto a cui è calcolato $\vec{L}$

Momento angolare nel moto curvilineo

- Nel moto curvilineo piano si può esprimere la velocità tramite le sue componenti radiali e tangenti alla traiettoria:

$$\vec{v} = \overrightarrow{v_r} + \overrightarrow{v_\theta}$$

- per cui:

$$\vec{L} = \vec{r} \times m * \vec{v} = \vec{r} \times m * (\overrightarrow{v_r} + \overrightarrow{v_\theta}) = \vec{r} \times m\overrightarrow{v_\theta}$$

  in quanto $\vec{r}$ e $\vec{v}_r$ sono paralleli e il loro prodotto vettoriale è nullo.

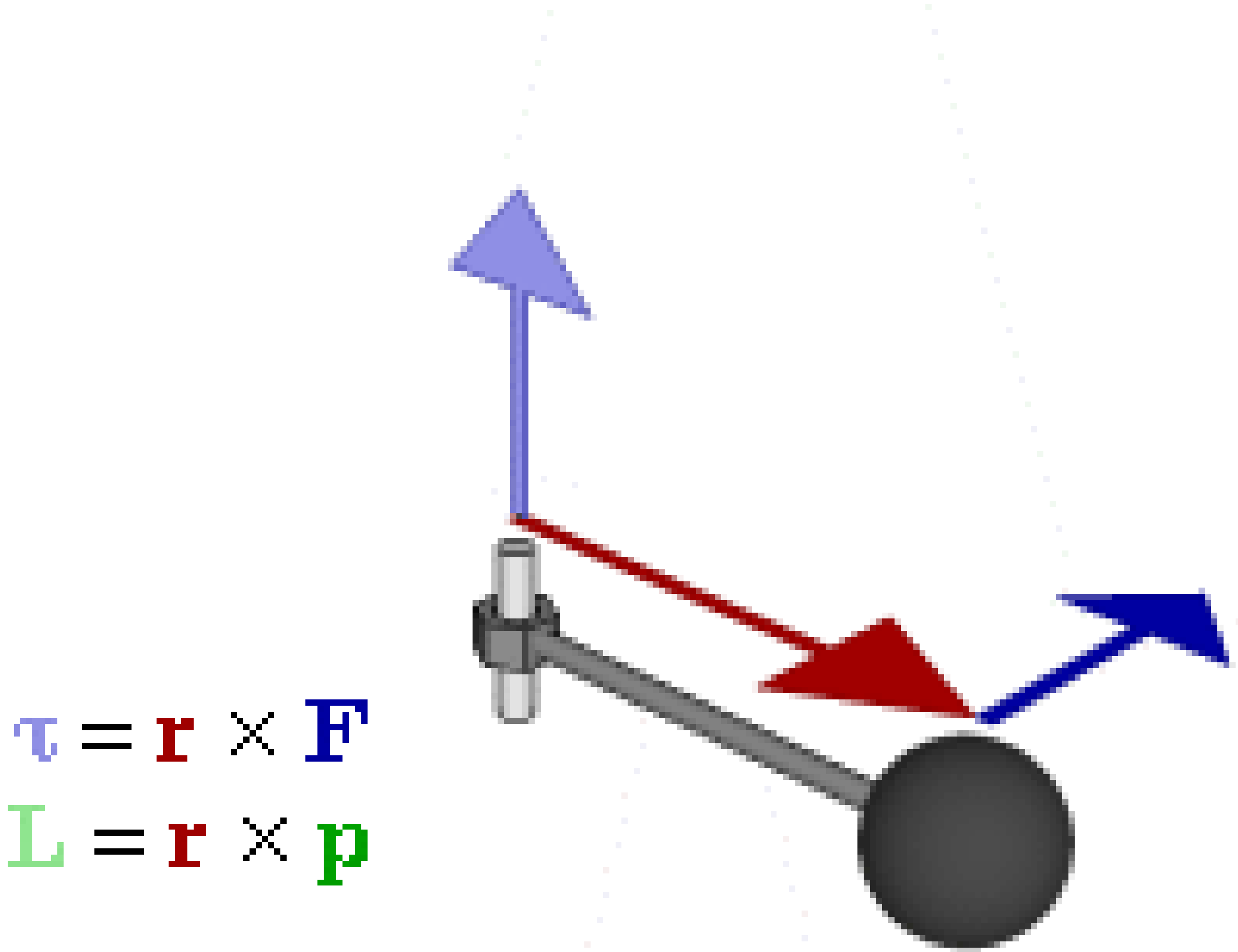
- Se il polo O sta nel piano del moto $\vec{L}$ risulta ortogonale a tale piano e vale in modulo:

$$L = m * r * v_\theta = m * r^2 * \frac{d\theta}{dt}$$

Momento della forza

- Il momento della forza, rispetto a un determinato punto O detto polo, è definito come:

$$\overrightarrow{M_o} = \vec{r} x \vec{F}$$



Teorema del momento angolare 1/3

- Se calcoliamo la variazione del momento angolare di un punto materiale P in movimento abbiamo:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} \times m * \vec{v} + \vec{r} \times m * \frac{d\vec{v}}{dt}$$

dove $\vec{r}$ è il raggio vettore che conginge P al polo O.

Teorema del momento angolare 2/3

- Supponiamo che il polo O sia fermo (nel sistema di riferimento da cui osserviamo il moto): allora $\frac{d\vec{r}}{dt}$ coincide con la velocità di P e il prodotto vettoriale si annulla.
- Nel secondo termine: $m * \frac{d\vec{v}}{dt} = m * \vec{a}$ coincide con la forza $\vec{F}$ applicata al punto P e quindi $\vec{r} \times \vec{F}$ è il momento della forza rispetto allo stesso polo O.

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$$

Teorema del momento angolare 3/3

- La derivata temporale del momento angolare $\vec{L}$ per un punto materiale è uguale al momento della forza $\vec{F}$ se entrambi i momenti sono riferiti allo stesso polo fisso di un sistema inerziale.

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$$

Conservazione del momento angolare

- Il momento angolare di un punto materiale rimane costante nel tempo (si conserva) se il momento delle forze è nullo:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = 0 \Rightarrow \vec{L} = costante$$

Teorema del momento dell'impulso

- Integrando tra l'istante iniziale e l'istante finale t:

$$\int_0^t \vec{M}\mathrm{d}t = \int_0^t (\vec{r} \times \vec{F})\mathrm{d}t = \vec{r} \times \int_0^t \vec{F}\mathrm{d}t = \vec{r} \times \vec{J} = \Delta L$$

- La variazione del momento angolare è uguale al momento dell'impulso applicato al punto.