Meccanica dei sistemi di punti materiali

- Centro di massa
- Conservazione della quantità di moto
- Teorema del momento angolare
- Conservazione del momento angolare
- Teoremi di König
- Urti

Antonio Pierro **@antonio_pierro_ (https://twitter.com/antonio_pierro_)**

Per consigli, suggerimenti, eventuali errori o altro potete scrivere una email a antonio.pierro[at]gmail.com

Centro di massa

- Dato un sistema di punti materiali,
- dato un particolare sistema di riferimento,
- si definisce centro di massa il punto geometrico la cui posizione è individuata dal raggio vettore:

$$\vec{r}_{cm} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i * \overrightarrow{r_i}}{\sum_{i=1}^{n} m_i}$$

- La posizione del centro di massa non dipende dal particolare sistema di riferimento, mentre le sue coordinate dipendono dal sistema di riferimento prescelto.

Velocità del centro di massa

- Supponendo di avere n punti in movimento, la posizione del centro di massa varierà:

$$\vec{v}_{cm} = \frac{d\vec{r}_{cm}}{dt} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \frac{m_i * d\vec{r}_i}{dt}}{\sum_{i=1}^{n} m_i} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i * \vec{v}_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i} = \frac{\vec{P}}{M}$$

- Vediamo quindi che $\vec{P}$ coincide con la quantità di moto $M * \vec{v}_{cm}$ del centro di massa, considerato come un punto materiale avente massa pari alla massa M totale del sistema.

Teorema del moto del centro di massa 1/2

- Ricaviamo l'accelerazione del centro di massa:

$$\vec{a}_{cm} = \frac{d\vec{v}_{cm}}{dt} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i * \frac{d\vec{v}_i}{dt}}{\sum_{i=1}^{n} m_i} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i * \vec{a}_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i * \vec{a}_i}{M}$$

$$M\vec{a}_{cm} = \sum_{i=1}^{n} m_i * \vec{a}_i = \sum_{i=1}^{n} (\vec{F}_i^{(E)} + \vec{F}_i^{(I)})) = \vec{R}^{(E)} + \vec{R}^{(I)} = \vec{R}^{(E)}$$

- Il centro di massa si muove come un punto materiale in cui è concentrata tutta la massa del sistema e a cui è applicata la risultante delle forze esterne.

Teorema del moto del centro di massa 2/2

$$\vec{R}^{(E)} = M * \vec{a}_{cm} = M * \frac{d\vec{v}_{cm}}{dt} = \frac{d}{dt}(M * \vec{v}_{cm}) = \frac{d\vec{P}}{dt}$$

- La risultante delle forze esterne è uguale alla derivata rispetto al tempo della quantità di moto totale del sistema.
- Il moto del centro di massa è determinato solo dalle forze esterne.
- Il moto di ciascun punto dipende dall'azione delle forze esterne e interne agenti su di esso.

Teoremi di König

- I teoremi di König stabiliscono le relazioni tra i momenti angolari e le energie cinetiche di un sistema di punti materiali, valutati rispetto a un sistema di riferimento inerziale e al sistema di riferimento del centro di massa.

Primo teorema di König

- Il primo teorema di König o teorema di König per il momento angolare afferma che:
  - Il momento angolare del sistema si può scrivere, nel sistema di riferimento inerziale, come somma del momento angolare dovuto al moto del centro di massa, $\overrightarrow{L_{cm}}$, e di quello del sistema rispetto al centro di massa $L^{'}$.
  - In formula:

$$\vec{L} = \overrightarrow{L^{'}} + \overrightarrow{r_{cm}} \times M\overrightarrow{v_{cm}} = \overrightarrow{L^{'}} + \overrightarrow{L_{cm}}$$

Secondo teorema di König

- Il secondo teorema di König o teorema di König per l'energia cinetica afferma che:
  - L'energia cinetica del sistema di punti si può scrivere, nel sistema di riferimento inerziale, come la somma dell'energia cinetica dovuta al moto del centro di massa e di quella del sistema rispetto al centro di massa.
  - In formula:

$$E_{cinetica} = E'_{cinetica} + \frac{1}{2} M * v_{cm}^2$$

Dimostrazione dei teoremi di König 1/2

- Per la dimostrazione dei teoremi di König definiamo il sistema del centro di massa rispetto al sistema inerziale.
- Il sistema del centro di massa ha le seguenti caratteristiche:
  1. origine nel centro di massa,
  2. gli assi hanno la stessa direzione del sistema inerziale,
  3. è inerziale solo se $\overrightarrow{R^{(E)}} = 0$ perchè implica che $\overrightarrow{a_{cm}} = 0$.

Dimostrazione dei teoremi di König 2/2

- Indicando con gli apici le grandezze relative al sistema del centro di massa, abbiamo:

$$\vec{r}_i = \vec{r}_{cm} + \vec{r}_i{}'$$
$$\vec{v}_i = \vec{v}_{cm} + \vec{v}_i{}'$$

- Quando si assume il centro di massa come sistema riferimento si ha:

$$\vec{r}_{cm}{}' = 0$$
$$\vec{v}_{cm}{}' = 0$$

Urti tra due punti materiali

- Si definisce urto tra due punti materiali un'interazione che avviene in un intervallo di tempo trascurabile rispetto al tempo di osservazione del sistema.
- Le forze che si manifestano durante l'urto sono forze interne al sistema.
- In assenza di forze esterne si verifica la conservazione della quantità di moto.
- In assenza di momento di forze esterne si verifica la conservazione del momento angolare.

Urto completamente anaelastico

- Un urto si dice completamente anaelastico quando i due punti restano attaccati dopo l'urto formando un unico corpo puntiforme di massa $m_1 + m_2$

- se $\overrightarrow{v_1}$ e $\overrightarrow{v_2}$ sono le velocità dei due punti nell'istante prima dell'urto e $\vec{v}'$ la velocità comune immediatamente dopo l'urto, si ha:

$$m_1 * \overrightarrow{v_1} + m_2 * \overrightarrow{v_2} = (m1 + m2)\vec{v}' = (m1 + m2)\overrightarrow{v_{cm}}$$

- Subito dopo l'urto i punti si muovono con la stessa velocità che aveva il centro di massa.

Energia nell'urto completamente anaelastico

- Calcoliamo l'energia cinetica prima e dopo l'urto applicando il secondo teorema di König:

$$E_{cinetica,iniziale} = \frac{1}{2} * mv_1^2 + \frac{1}{2} * mv_2^2 = E_k' + \frac{1}{2}(m_1 + m_2) * v_{cm}^2$$

$$E_{cinetica,finale} = \frac{1}{2}(m_1 + m_2) * v_{cm}^2$$

- Nell'urto completamente anaelastico viene assorbita l'energia E_k' (l'energia cinetica rispetto al centro di massa prima dell'urto). Infatti, dopo l'urto non c'è moto rispetto al centro di massa.

Urto elastico

- Si definisce urto elastico un urto durante il quale si conserva l'energia interna del sistema.
- Nell'urto elastico possiamo utilizzare le equazioni:

$$\vec{P}_{iniziale} = \vec{P}_{finale}$$
$$E_{cinetica,iniziale} = E_{cinetica,finale}$$

- I due corpi che si urtano subiscono durante l'urto delle deformazioni elastiche, riprendendo la configurazione iniziale subito dopo l'urto.

Urto anaelastico

- Si definisce urto anaelastico un urto in cui:
  - dopo l'urto i punti restano separati,
  - la quantità di moto del sistema si conserva,
  - l'energia cinetica non si conserva.

Esempio di urto anaelastico

- Un proiettile di massa (m1) 50 g e con velocità (v) 40 m/s si conficca in un blocco di massa (m2) 400 g.
  Il proiettile si muove orizzontalmente e il blocco si trova inizialmente in quiete.
- Determinare:
  1. la velocità del sistema dopo l'urto (v'),
  2. la percentuale di energia dissipata dopo l'urto.

Soluzione

- Imponiamo la conservazione della quantità di moto prima e dopo l'urto:

$$m_1 v = m_1 v' + m_2 v' = (m_1 + m_2) v'$$

$$v' = \frac{m_1}{m_1 + m_2} v = 4,44 m/s$$

- Calcoliamo ora la percentuale (P) di energia dissipata:

$$P = \frac{T - T'}{T}, \quad T' = \frac{1}{2}(m_1 + m_2) v'^2 \Rightarrow P = 0.88$$